Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 14 (16.2.2000 godz. 8:30)

1. Proszę wyliczyć

$$\tilde{K}^2 = \frac{\det'\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)}$$

dla potencjału $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$ wg wskazówek z poprzedniego zestawu.

2. Instanton na podstawie wykładu.

Na wykładzie zostało podane jedno rozwiązanie równania (1) o zerowej wartości własnej $y_1(t) = S_0{}^{-1/2} d\overline{x}/dt$. Asymptotyka tego rozwiązania dla $t \to \pm\infty$ dana jest jako $A\exp(-|t|)$. Stałą A można wyliczyć ze wzoru na asymptotykę wyrażenia dla jednego instantonu:

$$t = \int\limits_0^{\overline{x}} dx(2V(x))^{-1/2} = -\ln(S_0^{-1/2} A^{-1}\,(a - \overline{x})) + \mathcal{O}(a - \overline{x}).$$

Oczywiście istnieje drugie rozwiązanie, $\tilde{y}_1$, o asymptotyce $\pm A\exp(|t|)$. Funkcja $\psi_0(t)$ jest pewną kombinacją liniową tych 2 rozwiązań.

Należy jeszcze znaleźć wartość własną λ_0 (która dla $T \to \infty$ dąży do zera):

$$\lambda_0 = 4A^2\, e^{-T}.$$

Ostatecznie, dla dużych T

$$\frac{\det'(-\partial_t^2 + V'')}{\det(-\partial_t^2 + \omega^2)} = \frac{2\psi_0(T/2)}{\lambda_0 e^T} = \frac{1}{2A^2},$$

co kończy rachunek, trzeba tylko wyliczyć A.

3. Wyprowadzić wzór z wykładu dla funkcji $y_T(\tau)$, odpowiadającej najniższej wartości własnej λ dla instantonu:

$$y_T(\tau) = y_0(\tau) - \frac{\lambda(T)}{2A^2} \int\limits_{-T/2}^{\tau} dt\,(\tilde{y}_1(\tau)\, y_1(t) - \tilde{y}_1(t)\, y_1(\tau))\, y_T(t).$$

4. Pokazać, że dla cząstki w 3 wymiarach:

$$< (x_{k+1} - x_k)^2 >=< (y_{k+1} - y_k)^2 >=< (z_{k+1} - z_k)^2 >= \frac{i\epsilon\hbar}{m},$$

$$< (x_{k+1}-x_k)(y_{k+1}-y_k) >=< (z_{k+1}-z_k)(y_{k+1}-y_k) >=< (x_{k+1}-x_k)(z_{k+1}-z_k) >= 0.$$

5. Wyprowadzić relację komutacji operatorópw pędu i położenia wyliczając:

$$< \chi| m\frac{1}{\epsilon}\left((x_{k+1} - x_k)x_k - x_{k+1}(x_{k+1} - x_k)\right) |\psi > .$$