Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 13 (18.1.2000)

1. Proszę wyliczyć

$$\tilde{K} = \frac{\det'\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right)}{\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)}$$

dla potencjału $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$.

WSKAZÓWKA: Należy znaleźć spektrum wartości własnych:

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau). \tag{1}$$

Równanie to odpowiada równaniu Schrödingera dla potencjału $1/\cosh^2(\tau/2)$, które jest dyskutowane w podręczniku Landaua Lifszica (zad. 5 str. 81 i zad. 4 str 88 w wydaniu polskim PWN 1979). Pokazać, że w potencjale tym mamy skończoną liczbę (2) poziomów dyskretnych o energiach odpowiadających $\lambda_n = 0$ i $3/4$. (Przy okazji proszę jawnie wyliczyć funkcję falową modu zerowego.) Aby policzyć przyczynek od spektrum ciągłego należy najpierw pokazać, że w rozpatrywanym potencjale nie zachodzi odbicie. Jeżeli tak, to funkcja falowa $y_k(\tau)$ o asymptotyce $\mathrm{e}^{ik\tau}$ dla $\tau \to \infty$ ma w granicy $\tau \to -\infty$ asymptotykę $\mathrm{e}^{ik\tau + i\delta_k}$, gdzie δ_k jest przesunięciem fazowym, a $k = i\sqrt{\lambda_n - 1}$. Pokazać, że:

$$\mathrm{e}^{i\delta_k} = \frac{1+ik}{1-ik}\frac{1+2ik}{1-2ik}.$$

Identyczny argument stosuje się dla funkcji o asymptotyce $\mathrm{e}^{-ik\tau}$. Zatem ogólne rozwiązanie ma postać:

$$Ay_k(\tau) + By_k(-\tau)$$

Aby policzyć iloczyn wartości własnych, należy zamknąć układ w „pudle" $(-T/2, T/2)$. Z warunku znikania funkcji falowej na brzegach przedziału dostajemy, że:

$$Tk - \delta_k = \pi\, n$$

Oznaczmy rozwiązania tego równania przez $\tilde{k}_n$. Podobnie można pokazać, że dla oscylatora harmonicznegi $k_n = \pi n/T$. Sąd część $\tilde{K}$ od widma ciągłego ma postać:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+\tilde{k}_n^2}{1+k_n^2} = \exp\left(\sum_n \ln \frac{1+\tilde{k}_n^2}{1+k_n^2}\right) \approx \exp\left(\sum_n \frac{2k_n(\tilde{k}_n - k_n)}{1+k_n^2}\right).$$

Wyrażenie to trzeba teraz „uciąglić":

$$\ldots = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dk \frac{2\delta_k\, k}{1+k^2}\right) = \frac{1}{9}.$$

Ostatną równość otrzymuje się całkując przez części i wykorzystując podany wyżej wzór na fazę δ_k.

Pełny wynik otrzymuje się po domnożeniu przez niezerową wartość własną dla widma dyskretnego.

2. Instanton na podstawie wykładu.

   Na ostatnim wykładzie zostało podane jedno rozwiązanie równania (1) o zerowej wartości własnej $y_1(t) = S_0{}^{-1/2} d\overline{x}/dt$. Asymptotyka tego rozwiązania dla $t \to \pm\infty$ dana jest jako $A \exp(-|t|)$. Stałą A można wyliczyć ze wzoru na asymptotykę wyrażenia dla jednego instantonu:

$$t = \int_0^{\overline{x}} dx (2V(x))^{-1/2} = -\ln(S_0^{-1/2} A^{-1}\ (a - \overline{x})) + \mathcal{O}(a - \overline{x}).$$

   Oczywiście istnieje drugie rozwiązanie, $\tilde{y}_1$, o asymptotyce $\pm A \exp(|t|)$. Funkcja $\psi_0(t)$ jest pewną kombinacją liniową tych 2 rozwiązań.

   Należy jeszcze znaleźć wartość własną λ_0 (która dla $T \to \infty$ dąży do zera):

$$\lambda_0 = 4A^2\ e^{-T}.$$

   Ostatecznie, dla dużych T

$$\frac{\det'(-\partial_t^2 + V'')}{\det(-\partial_t^2 + \omega^2)} = \frac{2\psi_0(T/2)}{\lambda_0 e^T} = \frac{1}{2A^2},$$

   co kończy rachunek, trzeba tylko wyliczyć A.

3. Wyprowadzić wzór z wykładu dla funkcji $y_T(\tau)$, odpowiadającej najniższej wartości własnej λ dla instantonu:

$$y_T(\tau) = y_0(\tau) - \frac{\lambda(T)}{2A^2} \int_{-T/2}^{\tau} dt\, (\tilde{y}_1(\tau)\ y_1(t) - \tilde{y}_1(t)\ y_1(\tau))\, y_T(t).$$