Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 12 (11.1.2000)

1. Proszę sobie przypomnieć wyprowadzenie amplitudy przejścia przez barierę potencjału w opraciu o formalizm schrödingerowski. Porównać wynik z wynikiem na K z następnego zadania.

2. Dla potencjału $V(x) = \kappa(a^2 - x^2)^2$ z $\kappa = 1/8a^2$ wyliczyć propagator K korzystając ze wzoru van Vlecka.

   WSKAZÓWKA. Proszę skorzystać ze wzoru

   $$\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{E - V(x_1)}\sqrt{E - V(x_2)}} \frac{\partial E}{\partial T},$$

   gdzie $E(T)$ wyliczyliśmy już poprzednio.

   Interesuje nas wkład od jednego instantonu K_1. Należy rozpatrzyć trajektorie startujące w chwili $-T/2$ z punktu x_1 i kończące się w chwili $T/2$ w punkcie x_2, które tylko raz przechodzą przez punkt zwrotu x_- lub x_+ oraz, w skrajnym przypadku, trajektorie idące od x_- do x_+. Wysumujmy po wszystkich takich trajektoriach:

   $$K_1(T) = \int_{x_-}^{x_+} dx\, K(-x, x; T),$$

   gdzie K jest propagatorem dla jednej trajektorii. K należy zapisać korzystając ze wzoru van Vlecka. Całkę po x można wykonać wykorzystując symetrię potencjału.

3. Wyznacznik operatora Sturma-Liouville'a dla potencjału z poprzedniego zadania można wyliczyć dokładnie. W tym celu należy znaleźć spektrum wartości własnych:

   $$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x}(\tau))\right] y_n(\tau) = \lambda_n y_n(\tau).$$

   Proszę pokazać, że równanie to odpowiada równaniu Schrödingera dla potencjału $1/\cosh^2(x/2)$, które jest dyskutowane w podręczniku Landaua Lifszica (zad. 5 str. 81 i zad. 4 str. 88 w wydaniu polskim PWN 1979, a także w zbiorze zadań Brojan *et. al.*). Proszę znaleźć spektrum stanów związanych dla tego równania i pokazać, że dla stanów spektrum ciągłego nie zachodzi odbicie przy przejściu nad tym potencjałem. Własności te wykorzystamy następnie do wyliczenia iloczynu wszystkich wartości własnych.