Mechanika Kwantowa

kurs dla doktorantów – 10 (21.12.99)

1. Korzystając z wyników poprzednich zadań i z twierdzenia o wiriale:

$$2\langle T\rangle_n = \langle x\, V'(x)\rangle_n$$

znaleźć dyskretne wartości energii dla cząstki poruszającej się w potencjale

$$V(x) = V_o\, x^s.$$

2. Rozważyć ruch euklidesowy $x_1 \to x_2$ ($x_1 < x_2$) w czasie T o zadanej energii E w potencjale $V(x) = \kappa(x^2 - a^2)^2$. Dla ruchów bez zawracania jest oczywiste, że jeśli $T \to \infty$, to $x_1 \to -a$, $x_2 \to a$ i $E \to 0$. Wykazać, że w tej granicy

$$E = -8a^2 e^{-T}.$$

WSKAZÓWKA. Skorzystać ze znanego wzoru na T. Osobliwą całkę rozbić na część skończoną i rozbieżną w granicy $E = 0$ odejmując i dodając wyrażenie $((x-a)^2 + 2E)^{-1/2}$. W części skończonej można od razu położyć $E = 0$, a część rozbieżną trzeba policzyć dokładnie.

3. Euklidesowy oscylator harmoniczny. Znaleźć euklidesowy propagator dla oscyltora harmonicznego o masie $m = 1$ z warunkami brzegowymi $x(-T/2) = x(T/2) = 0$ i wyliczyć granicę dla $T \to \infty$. Porównać z propagatorem Minkowskiego przez dokonanie przejścia do urojonego czasu.

WSKAZÓWKA. Zgodnie z dyskusją na wykładzie ruch euklidesowy to ruch w odwróconym potencjale. Stąd klasyczna trajektoria $\overline{x}(t) \equiv 0$. Pozostaje zatem do wyliczenia wyznacznik operatora $D(t) = -\partial_t^2 + \omega^2$. W tym celu trzeba rozwiązać problem własny

$$D(t)\psi_n(t) = \lambda_n \psi_n(t)$$

z warunkami brzegowymi $\psi_n(-T/2) = \psi_n(T/2) = 0$.

Skorzystajmy z twierdzenia, które zostanie podane na wykładzie, które mówi, że jeżeli rozważymy dwie różne ograniczone w czasie funkcje $W^{(1)}$ i $W^{(2)}$, to:

$$\frac{\det(-\partial_t^2 + W^{(1)} - \lambda)}{\det(-\partial_t^2 + W^{(2)} - \lambda)} = \frac{\psi_\lambda^{(1)}(T/2)}{\psi_\lambda^{(2)}(T/2)}.$$

Tutaj $\psi_\lambda^{(i)}(t)$ jest rozwiązaniem równania:

$$(-\partial_t^2 + W^{(i)})\psi_\lambda^{(i)}(t) = \lambda \psi_\lambda^{(i)}(t)$$

z warunkiem brzegowym: $\psi_\lambda^{(i)}(-T/2) = 0$ i $\partial_t \psi_\lambda^{(i)}(-T/2) = 1$. Jeśli $\lambda = \lambda_n$ (wartość własna), to także $\psi_\lambda^{(i)}(T/2) = 0$ i w ten sposób spełniony jest nasz warunek brzegowy.

Korzystając z tego twierdzenia można łatwo wyliczyć wyznacznik dla oscylatora harmonicznego ($W = \omega^2$) w przestrzeni euklidesowej, zauważając, że stosunek

$$\frac{\det(-\partial_t^2 + W)}{\psi_0(T/2)} = \pi\hbar N^2$$

nie zależy od W i tym samym definiuje stałą normalizacyjną N. Stąd:

$$N \frac{1}{\sqrt{\det(-\partial_t^2 + W)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar\psi_0(T/2)}}.$$

Do wyliczenia pozostaje zatem $\psi_0(T/2)$.

Podejście to opiera się na wykładzie S. Colemana pt. „The usues of instantons" ze szkoły fizyki teoretycznej w Erice w roku 1977. Pełny tekst wykładu można znaleźć albo w materiałach konferencyjnych pod redakcją A. Zichichi'ego, albo w książce S. Colemana pt. „Aspects of symmetry".