Consider change of Grassmann variables $\{\theta_1, \theta_2 \dots \theta_N\}$

$$\psi_i = J_{ij}\theta_j.$$

Last term of function $f(\boldsymbol{\psi})$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}\psi_{i_1}\psi_{i_2}\dots\psi_{i_N}\ \gamma = \ \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}\, J_{i_1 j_1}J_{i_2 j_2}\dots J_{i_N j_N}\theta_{j_1}\theta_{j_2}\dots\theta_{j_N}\gamma.$$

Now w observe that

$$c_{j_1 j_2 \dots j_N} \equiv \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} J_{i_1 j_1}J_{i_2 j_2}\dots J_{i_N j_N}$$

is antisymmetric in indices j_k. Indeed, let's exchange $j_1$and j_2:

$$\begin{aligned} c_{j_2 j_1 \dots j_N} &= \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} J_{i_1 j_2}J_{i_2 j_1}\dots J_{i_N j_N} \\ &= \varepsilon_{i_2 i_1 \dots i_N} J_{i_2 j_2}J_{i_1 j_1}\dots J_{i_N j_N} \\ &= -\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} J_{i_1 j_2}J_{i_2 j_1}\dots J_{i_N j_N} \\ &= -c_{j_1 j_2 \dots j_N}. \end{aligned}$$

Hence c is proportional to the epsilon symbol

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} J_{i_1 j_2}J_{i_2 j_1}\dots J_{i_N j_N}\ = c\,\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N}.$$

Contracing with $\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N}$ we get

$$\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N}\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} J_{i_1 j_2}J_{i_2 j_1}\dots J_{i_N j_N} = N!c$$

but

$$\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N}\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} J_{i_1 j_2}J_{i_2 j_1}\dots J_{i_N j_N} = N!\ \det J \tag{1}$$

So we have

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}\psi_{i_1}\psi_{i_2}\dots\psi_{i_N}\ \gamma &= \ \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}\, J_{i_1 j_1}J_{i_2 j_2}\dots J_{i_N j_N}\theta_{j_1}\theta_{j_2}\dots\theta_{j_N}\gamma \\ &= \det J\ \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_N}\,\theta_{j_1}\theta_{j_2}\dots\theta_{j_N}\gamma \end{aligned}$$

Ilsustration of formula (1) for $N = 2$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ab}J_{ia}J_{jb} &= \varepsilon_{ab}J_{1a}J_{2b} - \varepsilon_{ab}J_{2a}J_{1b} \\ &= J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} - J_{21}J_{12} + J_{22}J_{11} \\ &= 2\,(J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}) \\ &= 2!\det J \end{aligned}$$