QCD

Energy-mometum tensor

W mechanice klasycznej energia (hamiltonian) dane są przez transformację Legendre'a

$$H = p\,\dot{q} - L$$

Zachowanie energii-pędu jest konsekwencją symetrii względem translacji (także czasowych):

$$x^\mu \to x^\mu + \delta a^\mu \quad \delta a^\mu \text{ nie zależy od } t \text{ i od } x$$

wtedy

$$\begin{aligned}\varphi\left(x^\mu + \delta a^\mu\right) &= \varphi(x) + \left(\partial_\nu \varphi(x)\right) \delta a^\nu \\ &\to \delta\varphi = \left(\partial_\nu \varphi(x)\right) \delta a^\nu\end{aligned}$$

i dalej

$$\delta\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\delta(\partial_\mu \varphi).$$

Używając r. ruchu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \quad \text{oraz} \quad \delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu(\delta\varphi)$$

mamy

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \left[\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\right]\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi) \\ &= \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\delta\varphi\right] = \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\partial_\nu\varphi\right]\delta a^\nu. \qquad (1)\end{aligned}$$

Z kolei

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{L}\,\delta a^\mu = \left(\partial_\mu \mathcal{L}\right)\,\delta a^\nu \delta^\mu_\nu \qquad (2)$$

i w konsekwencji, porównując (1) i (2)

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\partial_\nu\varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}\right]\delta a^\nu = 0.$$

Ponieważ δa^ν są dowolne, mamy zachowanie wielkości

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0, \text{ gdzie } T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\partial_\nu\varphi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}$$

jest tensorem energii-pędu. Podobnie jak w mechanice klasycznej energia (gęstość energii):

$$T^0_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\partial\dot{\varphi} - \mathcal{L}.$$

Równanie $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$ przyjmuje postać dla $\nu = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t} T^0_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = 0,$$

gdzie

$$\vec{T} = (T^1_0, T^2_0, T^3_0).$$

Całkując po całej przestrzeni:

$$0 = \int d^3x \left(\frac{\partial}{\partial t} T^0_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^0_0 + \int\limits_{\partial V \to \infty} d\vec{s} \cdot \vec{T} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^0_0$$

dostaliśmy prawo zachowania całkowitej energii pola skalarnego.

Składowe T^0_i mają interpretację gęstości pędu. Podobnie mozna pokazać zachowanie pędu.

W przypadku pola Kleina-Gordona

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \right)$$

mamy

$$T^0_0 = \frac{1}{2} \left(\dot{\varphi}^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right).$$

Podstawiając rozwiązania r. Kleina-Gordona mamy

$$\dot{\varphi} = -i \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(\omega_k \frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \omega_k \frac{a_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right)$$

$$\vec{\nabla}\varphi = i \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(\vec{k} \frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \vec{k} \frac{a_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right)$$

i używając wzoru

$$\frac{1}{V} \int d^3x \, e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

otrzymujemy

$$H = \int d^3x T^0_0 = \sum_{\vec{k}} \omega_k a_k^* a_k,$$

$$\vec{P} = \int d^3x \vec{T}^0 = \sum_{\vec{k}} \vec{k} a_k^* a_k.$$