

QCD

problem set 1

1. Hopf integral.

Calculate Hopf integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{iax^2}, \quad a > 0 \quad (1)$$

as a contour integral over the complex plane. Choose the contour in such a way that the integral $\int dt e^{-bt^2}$ with positive b and real t appears. When the contribution of the large circle can be neglected? Is the phase of the result unique?

2. Plane waves are defined as

$$u_p(x) = \langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} px}. \quad (2)$$

Note that the sign is dictated by the free Schrödinger equation

$$-i\hbar \frac{d}{dx} u_p(x) = p u_p(x) \quad (3)$$

and the normalization factor is chosen such that

$$\int dx u_{p'}^*(x) u_p(x) = \delta(p - p'). \quad (4)$$

Calculate

$$\langle x | \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m} \epsilon\right) \exp(V(\hat{x})\epsilon) | y \rangle \quad (5)$$

3. Pokazać, że funkcja falowa dana wzorem

$$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_2, t_2; x_1, t_1) \psi(x_1, t_1) dx_1,$$

gdzie K jest dane jako całka po trajektoriach:

$$K(x_2, t_2; x_1, t_1) = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{N-1} \frac{dx_i}{A} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\right], \quad (6)$$

spełnia równanie Schrödingera. W tym celu w rozważyć przypadek: $t_2 = t_1 + \epsilon$, gdzie ϵ jest krokiem czasowym w definicji całki po trajektoriach (co oznacza, że $N = 1$). Z kolei $x_1 = x_2 - \eta$. Przedyskutować związek między η a ϵ i przeprowadzić

rozwiniecie w tych parametrach (Feynman Hibbs rozdział 4-1). Zdyskredytyzowane działanie ma postać

$$S[x(t)] = \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{L}[i+1 \leftarrow i] \epsilon \quad (7)$$

gdzie

$$\mathcal{L}[i+1 \leftarrow i] = \frac{1}{2}m \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon} \right)^2 - V(x_i). \quad (8)$$

Stała normalizacji A została podana na wykładzie, ale można ją ustalić niezależnie z warunku normalizacji funkcji ψ . Pokazać, że jeśli ograniczyć się do dokładności $\mathcal{O}(\epsilon)$ argument w potencjale ($V(x_i)$, $V(x_{i+1})$ czy $V((x_{i+1}+x_i)/2)$) nie ma znaczenia.

4. Calculate K for a free particle.