Mechanika Teoretyczna

Zestaw 9.

1. Wyznaczyć funkcję tworzącą w wersji $F_3(p,Q)$, która prowadzi do tego samego przekształcenia kanonicznego, co funkcja tworząca $F_2(q,P) = q^2 e^P$.
2. Układ o jednym stopniu swobody jest zdefiniowany funkcją Hamiltona

$$H = -\frac{1}{2t^2}(p-q)^2 - \left(1+\frac{q}{t}\right)(p-q) - qt.$$

Pokazać, że transformacja

$$Q = \frac{p-q}{t}, \quad P = -(t-1)q - p$$

jest kanoniczna. Zapisać funkcję Hamiltona we współrzędnych P, Q. Korzystając z otrzymanego wyniku, znaleźć rozwiązanie równań ruchu z danymi początkowymi $q(t=1)=1$, $p(t=1)=1$.

3. Sprawdzić, czy następująca transformacja jest kanoniczna:

$$Q_1 = q_1, \quad Q_2 = p_2, \quad P_1 = p_1 - 2p_2, \quad P_2 = -2q_1 - q_2.$$

4. Pokazać, że transformacja

$$Q = p + iaq, \quad P = \frac{p - iaq}{2ia}$$

jest transformacją kanoniczną. Znaleźć funkcję tworzącą. Zastosować powyższą transformację do problemu oscylatora harmonicznego.

5. Rozważamy elipsoidalne współrzędne u, v, φ, związane ze standardowymi cylindrycznymi współrzędnymi r, φ, z wzorami

$$r = a\sinh v \sin u, \quad z = a\cosh v \cos u.$$

Zapisać funkcję Hamiltona swobodnej cząstki o masie m we współrzędnych u, v, φ.

6. Wykorzystując współrzędne z poprzedniego zadania, zapisać równanie Hamiltona-Jacobiego dla cząstki o masie m w polu grawitacyjnym 2 punktowych cząstek o masach m_1 i m_2, umieszczonych w odległości $2a$ wzdłuż osi z. Rozseparować zmienne. Wyrazić funkcję tworzącą przez kwadratury.
7. Rozważamy ruch cząstki w centralnym polu grawitacyjnym, zanurzonym dodatkowo w jednorodnym polu grawitacyjnym. Potencjał takiego pola ma postać

$$V(r,z) = -\frac{k}{r} + gz,$$

gdzie k i g są stałymi, r jest odległością od punktowego źródła pola, a z jest wysokością nad płaszczyzną XY. We współrzędnych kartezjańskich r jest dane przez $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Wprowadzić współrzędne paraboliczne ξ, η, φ, zadane przez

$$x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta),$$

tj. $\xi = r + z$, $\eta = r - z$. Zapisać funkcję Hamiltona oraz równanie Hamiltona-Jacobiego. Przeprowadzić separację zmiennych oraz sprowadzić rozwiązanie do kwadratur.