Mechanika Teoretyczna

Zestaw 8.

1. Funkcja Hamiltona oscylatora harmonicznego ma postać $H(p,q) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q)$. Rozważamy transformację kanoniczną z funkcją tworzącą $F(q,Q) = \frac{1}{2}\omega q^2 \mathrm{ctg}(2\pi Q)$. Zapisać funkcję Hamiltona w nowych zmiennych (P,Q) oraz rozwiązać równania Hamiltona. Wskazówka: $p = \partial F/\partial q$, $P = -\partial F/\partial Q$. Wyliczyć p i Q na podstawie powyższych wzorów, a następnie rozwikłać otrzymane relacje względem p i q. Otrzymane wyniki podstawić do wyrażenia na funkcję Hamiltona.
2. Dana jest funkcja tworząca zależna od „starych" pędów i „nowych" współrzędnych $F(p,Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p$. Pokazać, że generuje ona transformację kanoniczną

$$\begin{aligned} Q &= \ln\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right), \\ P &= 2\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right)\sqrt{q}\sin p. \end{aligned}$$

3. Rozważamy spadek swobodny ciała, opisany funkcją Hamiltona

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz.$$

Znaleźć funkcję tworzącą $F(p,P)$ (zależną od „starych" i „nowych" pędów) taką, że funkcja Hamiltona w „nowych" współrzędnych ma postać $\tilde{H}(Q,P) = P$. Znaleźć jawną postać transformacji kanonicznej $Q(z,p)$, $P(z,p)$. Otrzymać postać wyrażenia na $z(p,P)$. Jaką interpretację ma nowa współrzędna Q?
4. Niech $F = F(p,q)$ i $G = G(p,q)$ będą dwiema funkcjami w przestrzeni fazowej. Rozważamy transformację kanoniczną $(p,q) \mapsto (P,Q)$. Funkcje F i G transformują się zgodnie z przepisem $\tilde{F}(P,Q) = \tilde{F}(P(p,q),Q(p,q)) = F(p,q)$, $\tilde{G}(P,Q) = \tilde{G}(P(p,q),Q(p,q)) = G(p,q)$. Pokazać, że nawiasy Poissona nie ulegają zmianie, tj.,

$$\{\tilde{F},\tilde{G}\}_{P,Q} = \{F,G\}_{p,q}.$$

Jaką relację daje wybór $F = P$, $G = Q$?
5. Niech $(p,q) \mapsto (P,Q)$ będzie transformacją przestrzeni fazowej. Pokazać, że jeśli

$$\{Q_i,Q_j\} = 0, \quad \{P_i,P_j\} = 0, \quad \{P_i,Q_j\} = \delta_{ij},$$

to transformacja ta jest symplektyczna.