Mechanika Teoretyczna

Zestaw 7.

1. Udowodnić, że liniowa transformacja $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest symplektyczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A = 1$.
2. Rozważamy transformację $(r, \varphi) \mapsto (p, q)$, określoną wzorami

$$p = \psi(r)\cos\varphi, \quad q = \psi(r)\sin\varphi.$$

Dla jakich funkcji ψ powyższa transformacja jest symplektyczna?

3. Rozważmy układ hamiltonowski

$$\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y)$$

oraz transformację współrzędnych $y = \varphi(z)$. Udowodnić, że dla transformacji symplektycznej $\varphi(z)$, układ zapisany we współrzędnych z jest również hamiltonowski, z funkcją Hamiltona $H(z) = H(\varphi(y))$.

4. W obszarze $U = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2\colon p^2 + q^2 > 0\}$ rozważamy równanie

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Udowodnić, że:

a) Potok związany z powyższym równaniem jest symplektyczny wszędzie w U.

b) Na każdym jednospójnym podzbiorze U powyższy układ jest hamiltonowski, a funkcja Hamiltona ma postać $H(p, q) = \mathrm{Im}\ \ln(p + iq) + \mathrm{const.}$

c) Nie istnieje różniczkowalna funkcja $H\colon U \to \mathbb{R}$ pozwalająca zapisać prawą stronę powyższego równania w postaci $J^{-1}\nabla H(p, q)$ dla wszystkich $(p, q) \in U$.