

MECHANIKA TEORETYCZNA
Zestaw 6.

1. Rozważamy tzw. wahadło sferyczne – sztywny, nieważki pręt o długości R jest zaczepiony za jeden z końców, wokół którego może się dowolnie obracać (nie tylko w ustalonej płaszczyźnie). Na drugim końcu pręta znajduje się masa m . Całość zanurzona jest w jednorodnym polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g . Znaleźć funkcję Lagrange’a oraz funkcję Hamiltona dla tego układu. Zapisać równania Hamiltona.
2. Wyznaczyć funkcję Hamiltona dla oscylatora anharmonicznego o funkcji Lagrange’a

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2.$$

3. Wyznaczyć funkcję Lagrange’a, gdy funkcja Hamiltona jest równa

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}.$$

4. Rozważamy ruch punktu materialnego po spirali, zadanej w cylindrycznym układzie współrzędnych (r, φ, z) relacją $r = \text{const}$, $z = k\varphi$, gdzie $k = \text{const}$. Punkt porusza się w jednorodnym polu grawitacyjnym, równoległym do kierunku z . Zapisać funkcję Hamiltona. Znaleźć oraz rozwiązać równania Hamiltona.
5. Rozważamy układ o 1 stopniu swobody opisany funkcją Hamiltona

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2}.$$

pokazać, że

$$D = \frac{pq}{2} - Ht$$

jest całką ruchu.