MECHANIKA TEORETYCZNA

Zestaw 5.

1. Dwie cząstki o masach m i M połączone są nitką przechodzącą przez wąski otwór w stole. Jedna (M) porusza się pionowo, a druga (m) poziomo po powierzchni stołu. Układ znajduje się w stałym polu grawitacyjnym. Znaleźć funkcję Lagrange'a i równania ruchu. Znaleźć całki ruchu. Znaleźć rozwiązanie stacjonarne i zbadać jego stabilność (proszę zgłosić to zadanie nawet, gdy mają Państwo wątpliwości co do ostatniego polecenia).
2. Cząstka o masie m porusza się po ustalonej płaszczyźnie w newtonowskim polu grawitacyjnym pochodzącym od nieruchomego źródła o masie M, znajdującego się w odległości b od płaszczyzny. Zapisać funkcję Lagrange'a i wyznaczyć całki ruchu. Dla ruchu po orbicie kołowej wyznaczyć zależność okresu od promienia orbity.
3. Pokazać, że tzw. wektor Rungego-Lenza

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} - \mu k \frac{\mathbf{r}}{r}$$

jest całką ruchu w problemie Keplera. Symbol μ oznacza masę zredukowaną, potencjał grawitacyjny ma postać $-k/r$, $\mathbf{p}$ oznacza wektor pędu, a $\mathbf{l}$ wektor krętu.
4. Znaleźć geometryczną interpretację wektora Rungego-Lenza dla orbity eliptycznej.
5. Cząstka o masie m porusza się w polu centralnym

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2},$$

gdzie α i β są dodatnimi stałymi. Zapisać funkcję Lagrange'a i wyznaczyć całki ruchu. Dla ruchu po orbicie kołowej wyznaczyć zależność okresu od promienia orbity. Zakładając, że człon β/r^2 jest małą perturbacją potencjału Keplera, wyznaczyć kąt precesji perycentrum dla lekko zaburzonej orbity kołowej.