Zadania z Algebry z Geometrią
Zestaw 6.

W tym niniejszym zestawie symbolem $\cong$ oznaczamy izomorficzność zbiorów.

1. Udowodnić następujące twierdzenie: Niech $\phi\colon G \to H$ będzie homomorfizmem grup G i H. Wtedy jądro $\operatorname{Ker}\phi$ jest podgrupą normalną w G oraz $G/\operatorname{Ker}\phi \cong \operatorname{Im}\phi$.
2. Udowodnić następujące twierdzenie: Niech K będzie podgrupą normalną G. Istnieje epimorfizm $\pi\colon G \to G/K$ taki, że $\operatorname{Ker}\pi = K$.
3. Udowodnić następujące twierdzenie: Niech G będzie grupą, a $H, K \subset G$ jej podgrupami. Załóżmy ponadto, że K jest dzielnikiem normalnym G. Zachodzą wtedy następujące warunki: i) $HK = KH$ jest podgrupą G. ii) $K \subset HK$, iii) $H \cap K$ jest podgrupą normalną w H. iv) $\phi\colon hK \mapsto h(H \cap K)$ jest izomorfizmem grup $HK/K \cong H/(H \cap K)$.
4. W grupie permutacji S_4 wyróżniamy

$$V_4 = \{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$$

oraz

$$S_3 = \{e, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}.$$

Wykazać, że $S_4/V_4 \cong S_3$.

Osoby w potrzebie znajdą dowody powyższych twierdzeń w książce: A. Kostrikin, Wstęp do Algebry, PWN.