Zadania z Algebry z Geometrią
Zestaw 4.

1. Rozważamy grupę ilorazową $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$ multiplikatywnych grup liczbowych. Wykazać, że dla każdego $\epsilon > 0$ zachodzi $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^* = \{x\mathbb{Q}^* | x \in (0, \epsilon)\}$.
2. Wykazać, że zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ z działaniem $(a, b) \circ (a', b') = (a + ba', bb')$ tworzy grupę; oznaczmy ją $\mathbb{R} * \mathbb{R}^*$. Wykazać, że odwzorowanie $h\colon \mathbb{R} * \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $h(a, b) = b$, jest homomorfizmem tej grupy na grupę multiplikatywną $\mathbb{R}^*$. Wykazać, że grupa niezmiennicza $\operatorname{Ker} h$ jest izomorficzna z grupą addytywną $\mathbb{R}$, a grupa ilorazowa $\mathbb{R} * \mathbb{R}^*/\operatorname{Ker} h$ jest izomorficzna z grupą $\mathbb{R}^*$.
3. Proszę przedstawić dane liczby zespolone w jawnej postaci $a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.
   a) $(3 + 5i)/(2 - 7i)$,
   b) $3e^{i\pi/3}$,
   c) $(1 + i)^{11}$.
4. Proszę wykazać tożsamość $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.
5. Zwijając sumę $1 + z + z^2 + \ldots + z^n$ dla $z = e^{i\phi}$ wykazać, że
$$\frac{1}{2} + \cos\phi + \cos 2\phi + \ldots + \cos n\phi = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\phi}{2\sin\frac{1}{2}\phi},$$
$$\sin\phi + \sin 2\phi + \ldots + \sin n\phi = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}\phi}{\sin\frac{1}{2}\phi}.$$
6. Dla różnowartościowego ciągu liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 oznaczamy $d(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$. Wykazać, że jeśli $d(z_1, z_2, z_3)$ jest liczbą rzeczywistą, to liczby z_1, z_2, z_3 leżą na jednej prostej na płaszczyźnie Gaussa, a w przeciwnym przypadku leżą na jednym okręgu.