

ALGEBRA Z GEOMETRIĄ  
Zestaw 9.

1. Dana jest macierz operatora symetrycznego w ortonormalnej bazie przestrzeni euklidesowej. Znaleźć macierz przejścia do ortonormalnej bazy własnej tego operatora. Podać jego macierz w nowej bazie.

a)

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -15 \\ 3 & -9 & -5 \\ -15 & -5 & 15 \end{pmatrix},$$

b)

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Udowodnić następujące własności sprzężenia operatorowego ( $A, B$  są operatorami,  $\lambda$  jest liczbą z ciała  $\mathbb{K}$ )
- a)  $(AB)^* = B^*A^*$ ,
  - b)  $(A^*)^* = A$ ,
  - c)  $(A + B)^* = A^* + B^*$ ,
  - d)  $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$ .
3. Udowodnić, że złożenie dwóch operatorów unitarnych jest operatorem unitarnym.
4. Niech  $U$  będzie operatorem unitarnym, a  $A$  operatorem samosprzężonym. Pokazać, że operator  $U^{-1}AU$  jest operatorem samosprzężonym.
5. Niech  $A$  oraz  $B$  będą operatorami samosprzężonymi. Pokazać, że operatory  $AB + BA$  oraz  $i(AB - BA)$  są również samosprzężone.