Algebra z Geometrią

Zestaw 8.

1. W bazie (e_1, e_2, e_3) dana jest macierz operatora. Wyznaczyć jego wartości oraz wektory własne. Jeśli operator jest diagonalizowalny, zapisać macierz przejścia do bazy wektorów własnych oraz podać macierz operatora w tej bazie.

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -8 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ -3 & 4 & -9 \\ 5 & -10 & 13 \end{pmatrix},$$

$$\text{(c)} \quad \begin{pmatrix} -56 & -105 & 108 \\ 9 & 16 & -18 \\ -21 & -40 & 40 \end{pmatrix}.$$

2. Wykazać, że jeśli operator w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej ma tylko jedną wartość własną, to albo jest operatorem proporcjonalnym do operatora identycznościowego, albo istnieje baza, w której jego macierz ma postać

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3. Sprowadzić poniższe formy kwadratowe metryk symetrycznych do postaci kanonicznej.
   a) $g(x,x) = 2(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 2(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 2x^1x^3 + 2x^1x^3$,
   b) $g(x,x) = x^1x^2 - 2x^2x^3 + 4x^1x^3$.
4. W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej wybrana została ortonormalna baza (e_1, e_2, e_3). Dane są układy wektorów (f_1, f_2, f_3). Przeprowadzić procedurę ortogonalizacji Grama-Schmidta tych wektorów. Otrzymane wektory unormować.
   a) $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_1 - 2e_2,\ f_3 = 3e_1 - e_2 - e_3$;
   b) $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\ f_3 = e_1 + e_2 + e_3$.
5. Niech $(f_1, \ldots, f_k)$ będzie ortonormalnym układem wektorów (nie koniecznie bazą) w przestrzeni euklidesowej lub unitarnej V. Wykazać, że dla każdego wektora $x \in V$ zachodzi tzw. nierówność Bessela:

$$||x||^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} |g(f_i, x)|^2.$$