Algebra z Geometrią

Zestaw 7.

1. W rzeczywistej przestrzeni wektorowej wybrano bazę (e_1, e_2, e_3). Sprawdzić, czy wektory
$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2, \\ e_2' &= 2e_1 + e_2 - 2e_3, \\ e_3' &= -3e_1 - e_2 + 2e_2 \end{aligned}$$
tworzą bazę. Jeśli tak jest, wyrazić wektor $x = 4e_1 - 16e_2 + 8e_3$ jako kombinację liniową bazy (e_1', e_2', e_3').
2. Pokazać, że ogół kombinacji liniowych funkcji $\sin t$, $\cos t$, $0 \leqslant t < 2\pi$, tworzy przestrzeń wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykazać, że operator różniczkowania d^2/dt^2 (druga pochodna) jest operatorem liniowym w tej przestrzeni. Znaleźć macierz tego operatora, przyjmując za wektory bazowe funkcje $\sin t$, $\cos t$.
3. Operator A działa w 3-wymiarowej przestrzeni wektorowej V na wektory bazowe $(e_1, \ldots, e_3)$ według następującego przepisu:
$$\begin{aligned} A(e_1) &= 4e_1 + e_3, \\ A(e_2) &= 3e_1 + e_3, \\ A(e_3) &= -e_1 + e_2. \end{aligned}$$
Zapisać macierz operatora A w bazie $(e_1, \ldots, e_3)$. Znaleźć macierz operatora A w bazie $(e_1', \ldots, e_3')$, związanej z bazą $(e_1, \ldots, e_3)$ macierzą przejścia
$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. W rzeczywistej przestrzeni liniowej wielomianów stopnia nie wyższego niż 2 określony jest operator działający według przepisu
$$A(p(x)) = (x^2 - 1)p''(x) + 2xp'(x) - 3p(x).$$
Znaleźć macierz operatora A w bazie wielomianów $e_n = (x-1)^{n-1}$, $n = 1, 2, 3$.
5. (Z podręcznika prof. Herdegena) Niech niezerowa macierz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ma zerowy wyznacznik. Określamy operator S działający w przestrzeni rzeczywistych, symetrycznych macierzy 2×2 zgodnie z regułą $S(X) = A^{\mathrm{T}} X A$. Wyliczyć obraz i jądro tego operatora, znaleźć bazy tych podprzestrzeni.