# Algebra z Geometrią

*Zestaw 5.*

1. Niech $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ i $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Wykazać, że macierz $\mathbb{1}_m - AB$ jest odwracalna wtedy, i tylko wtedy, gdy macierz $\mathbb{1}_n - BA$ jest odwracalna.
2. Wykorzystując rozwinięcie Laplace'a, obliczyć wyznaczniki

   a)
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

   b)
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Wykazać następujące wzory

   a)
$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(1-x_i);$$

   b)
$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} & a^n \\ x_1 & 1 & a & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ x_2 & x_2 & 1 & \dots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & 1 & a \\ x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(1-ax_i).$$