# Algebra z Geometrią

*Zestaw 4.*

1. Niech
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Obliczyć macierze $BA$, $A^{\mathrm{T}}$, $A^{\mathrm{T}}B$, $AC$, $C^{\mathrm{T}}C$, $CC^{\mathrm{T}}$.
2. Udowodnić wzór $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$, gdzie $A$ i $B$ są macierzami.
3. Udowodnić, że jeśli macierz rzeczywista $A$ spełnia $A^{\mathrm{T}}A = 0$, to $A = 0$.
4. Niech $A$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$, a $B$ macierzą wymiaru $n \times m$. Udowodnić, że $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
5. Wykazać, że nie istnieją macierze kwadratowe $A$ i $B$ takie, że $AB - BA = \mathbb{1}$, gdzie $\mathbb{1}$ jest macierzą jednostkową.
6. Jeśli dla macierzy kwadratowych $A$ i $B$ zachodzi $AB - BA = 0$, mówimy, że macierze te „komutują”. Pokazać, że jeśli macierz kwadratowa $A$ komutuje ze wszystkimi macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to jest ona proporcjonalna do macierzy jednostkowej.
7. Niech $T$ będzie kwadratową, ściśle trójkątną macierzą wymiaru $n \times n$. Terminem macierz ściśle trójkątna określamy macierz trójkątną (dolną lub górną), której elementy diagonalne są równe zeru. Pokazać, że macierz $T$ jest nilpotentna, tj. $T^n = 0$.