

ALGEBRA Z GEOMETRIĄ  
Zestaw 3.

1. Zapisać podane liczby zespolone w postaci  $a + ib$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ :
  - a)  $(1 + 2i)/(3 - 4i)$ ,
  - b)  $3e^{i\pi/3}$ ,
  - c)  $(1 + i)^{11}$ .

2. Obliczyć następujące pierwiastki zespolone:

$$\sqrt[3]{-8}, \quad \sqrt[3]{-i}, \quad \sqrt[6]{16}.$$

3. Dla jakich liczb zespolonych  $z$  spełniona jest równość

$$\bar{z} = z^n,$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę całkowitą.

4. Rozwiązać, w liczbach zespolonych, równania

$$z^2 - (4 + i)z + 5 - i, \quad z^2 - 5z + 7 + i = 0.$$

5. Wykazać następującą tożsamość:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

6. Niech  $f(z)$  będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, a  $z_0$  jego pierwiastkiem, tj.  $f(z_0) = 0$ . Udowodnić, że  $f(\bar{z}_0) = 0$ .
7. Wykorzystując wzór na sumę postępu geometrycznego

$$1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

udowodnić następujące tożsamości:

$$\frac{1}{2} + \cos \phi + \cos 2\phi + \dots + \cos n\phi = \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \phi \right]}{2 \sin \left( \frac{1}{2} \phi \right)},$$

$$\sin \phi + \sin 2\phi + \dots + \sin n\phi = \frac{\sin \left( \frac{n+1}{2} \phi \right) \sin \left( \frac{n}{2} \phi \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} \phi \right)}.$$