Algebra z Geometrią

Zestaw 2.

1. Niech $(G, \circ)$ będzie grupą. Element neutralny w G oznaczamy przez e. Pokazać, że jeżeli dla każdego elementu $a \in G$ zachodzi $a \circ a = e$, to G jest grupą abelową (przemienną).
2. Niech $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pokazać, że $\phi\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+^*$, $\phi(x) = x^2$ jest homomorfizmem grup multiplikatywnych $\mathbb{R}^*$ i $\mathbb{R}_+^*$.
3. Niech G będzie grupą, a e jej elementem neutralnym. Pokazać, że $\phi\colon G \to G$, $\phi(x) = e$ jest homomorfizmem (tzw. homomorfizmem trywialnym).
4. Niech $(G, \circ)$ będzie grupą. Pokazać, że odwzorowanie $h\colon G \to G$, $h(a) = a \circ a$ jest homomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $(G, \circ)$ jest grupą abelową. Powtórzyć to samo zadanie dla $h(a) = a^{-1}$.
5. Niech G będzie grupą, a $a \in G$ ustalonym jej elementem. Pokazać, że $\phi(x) = axa^{-1}$ jest automorfizmem (odwzorowania tej postaci nazywamy automorfizmami wewnętrznymi).