

ZADANIA Z ALGEBRY Z GEOMETRIĄ
ZESTAW F.

1. Dana jest macierz operatora symetrycznego w ortonormalnej bazie przestrzeni euklidesowej. Znaleźć macierz przejścia do ortonormalnej bazy własnej tego operatora. Podać jego macierz w nowej bazie.

a)

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -15 \\ 3 & -9 & -5 \\ -15 & -5 & 15 \end{pmatrix},$$

b)

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Dana jest macierz operatora w bazie ortonormalnej w przestrzeni unitarnej. Jakiego typu jest to operator? Znaleźć macierz przejścia do ortonormalnej bazy własnej tego operatora. Podać jego macierz w nowej bazie.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 2+i \\ i & 1 & -1+2i \\ 2-i & -1-2i & 5 \end{pmatrix},$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1+i & -i \\ i & 1+i \end{pmatrix}.$$

3. W bazie (e_1, e_2, e_3) w rzeczywistej przestrzeni liniowej zadane są formy kwadratowe pary form symetrycznych:

$$\begin{aligned} g_1(x, x) &= 2(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 2(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 2x^1x^3 + 2x^2x^3, \\ g_2(x, x) &= -7(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + (x^3)^2 + 2x^1x^2 - 4x^1x^3 + 2x^2x^3. \end{aligned}$$

Wykazać, że jedna z form jest dodatnio określona i wyliczyć macierz przejścia do bazy, w której forma dodatnio określona ma postać kanoniczną, a druga z form – postać diagonalną. Podać macierze form w nowej bazie.

4. W dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej odbicie R jest zadane działaniem $Re_1 = e_1$, $Re_2 = -e_2$, gdzie (e_1, e_2) jest ortonormalną, dodatnio zorientowaną bazą. Podobne warunki spełniają odbicie R' i baza (e'_1, e'_2) . Znaleźć macierz przejścia z bazy nieprimowanej do bazy primowanej, dla której złożenie odbić $R'R$ jest obrotem o kąt φ .