

ZADANIA Z ALGEBRY Z GEOMETRIĄ
ZESTAW C.

1. Niech funkcja zespolona (lub rzeczywista) na osi rzeczywistej dana będzie jako suma szeregu o nieskończonym promieniu zbieżności. Wykazać, że jeśli operator w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej (lub rzeczywistej) ma w bazie (e_1, e_2) macierz

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

to macierz operatora $f(A)$ ma w tej samej bazie postać

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix},$$

gdzie f' jest pochodną funkcji f . Jak wynik zmieni się, jeśli element macierzy operatora A równy 1 zastąpić dowolnym parametrem μ ?

2. W bazie $(e_1, \dots, e_n)$ przestrzeni rzeczywistej forma kwadratowa metryki symetrycznej ma podaną postać. Wyliczyć macierz przejścia do bazy $(e'_1, \dots, e'_n)$, w której forma przyjmuje postać kanoniczną. Podać jej macierz w nowej bazie.
- a) $g(x, x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + 9(x^4)^2 + 2x^1x^2 + 6x^1x^4 + 2x^2x^3$;
b) $g(x, x) = x^1x^2 - 2x^2x^3 + 4x^1x^3$.
3. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, dla formy hermitowskiej w przestrzeni zespolonej.
- a) $g(x, x) = \overline{x^1}x^1 + 2\overline{x^2}x^2 + i\overline{x^1}x^2 - i\overline{x^2}x^1 + (1+i)\overline{x^2}x^3 + (1-i)\overline{x^3}x^2$;
b) $g(x, x) = (1-i)\overline{x^1}x^2 + (1+i)\overline{x^2}x^1 + i\overline{x^1}x^3 - i\overline{x^3}x^1 + \overline{x^2}x^3 + \overline{x^3}x^2$.
4. Forma kwadratowa metryki g w bazie (e_1, e_2, e_3) trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej ma postać $g(x, x) = (x^1 - x^2)^2 + (x^2 - x^3)^2 + (x^3 - x^1)^2$. Czy wynika stąd, że sygnatura metryki wynosi $(3, 0, 0)$? Zastosować do tej formy kwadratowej standardowy algorytm sprowadzania do postaci kanonicznej. Jaka jest przyczyna rozbieżności?