

ZADANIA Z ALGEBRY Z GEOMETRIĄ
ZESTAW B.

1. Niech V będzie przestrzenią rzeczywistych wielomianów stopnia nie wyższego niż 3. Określamy operator $\hat{A}: V \rightarrow V$ wzorem

$$\hat{A}p(x) = \frac{d}{dx} [(x+1)p(x)] + \frac{1}{x} \int_0^x [p(t) + 2p''(t)] dt.$$

Obliczyć ślad $\text{Tr } \hat{A}$ oraz wyznacznik $\det \hat{A}$.

2. Niech V będzie przestrzenią z poprzedniego zadania. Określamy operator wzorem

$$\hat{A}p(x) = (x^2 + 2)p''(x) - 2xp'(x) + 2p(x).$$

Znaleźć macierz operatora $\hat{A}$ w bazie wielomianów $e_n = (x-1)^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, 4$. Znaleźć jądro oraz obraz $\hat{A}$.

3. Dana jest macierz operatora $\hat{A}$ w bazie (e_1, e_2, e_3) przestrzeni rzeczywistej. Wyliczyć wartości i wektory własne tego operatora. Jeśli operator jest diagonalizowalny, to znaleźć macierz przejścia do bazy złożonej z wektorów własnych. Podać związek baz i macierz operatora w nowej bazie.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & -8 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ -3 & 4 & -9 \\ 5 & -10 & 13 \end{pmatrix},$$

$$(c) \quad \begin{pmatrix} -56 & -105 & 108 \\ 9 & 16 & -18 \\ -21 & -40 & 40 \end{pmatrix}.$$

4. Wykazać, że jeśli operator w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej ma tylko jedną wartość własną, to albo jest operatorem proporcjonalnym do operatora identycznościowego, albo istnieje baza, w której jego macierz ma postać

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$