

ZADANIA Z ALGEBRY Z GEOMETRIĄ
ZESTAW A.

1. Funkcja $A: \mathbb{K}^m \ni v \rightarrow A(v) \in \mathbb{K}^n$, $n \geq m$, określona jest wzorem

$$(A(v))^i = \begin{cases} v^i & \text{dla } i \leq m, \\ 0 & \text{dla } i > m. \end{cases}$$

Pokazać, że A jest odwzorowaniem liniowym.

2. Niech macierz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ma zerowy wyznacznik. Określamy operator S działający w przestrzeni rzeczywistych, symetrycznych macierzy 2×2 zgodnie z regułą $S(X) = A^T X A$. Wyliczyć obraz i jądro tego operatora, znaleźć bazy tych podprzestrzeni.
3. Dane jest działanie operatora liniowego na wektory bazy $(e_1, \dots, e_n)$ oraz macierz przejścia do bazy $(e'_1, \dots, e'_n)$. Wyliczyć macierz operatora w bazie (e'_i) .
- a)

$$\begin{aligned} Ae_1 &= 3e_1 - 2e_2 + 5e_3, \\ Ae_2 &= -e_1 + 7e_2 + 2e_3, \\ Ae_3 &= e_1 + e_2 - e_3, \end{aligned}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

b)

$$\begin{aligned} Ae_1 &= -ie_1 + e_2, \\ Ae_2 &= 2ie_1 - e_2, \end{aligned}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}.$$

4. W trójwymiarowej przestrzeni zespolonej V wybrano bazę (e_1, e_2, e_3) oraz operator działający na wektory bazy według przepisu: $Ae_1 = e_1 + ie_2$, $Ae_2 = ie_1 + e_3$, $Ae_3 = z(z - 3 + i)e_1 - 4ie_2 + 3e_3$, gdzie z jest zespolonym parametrem. Znaleźć bazę jądra oraz bazę obrazu operatora A w zależności od wartości parametru.