

ZADANIA Z ALGEBRY I GEOMETRIĄ
ZESTAW 8.

1. Sprawdzić, czy podzbiory zbioru macierzy $\mathbb{K}^{n \times n}$ złożone z macierzy spełniających następujące warunki tworzą podprzestrzeń wektorową:
 - a) $A^2 = 0$;
 - b) $\det A = 0$;
 - c) $\text{Tr} A = 0$;
 - d) macierze trójkątne.Znaleźć bazy odpowiednich przestrzeni.
2. Zbiór odwzorowań $\mathbb{N} \ni k \rightarrow c_k \in \mathbb{R}$, czyli nieskończonych ciągów rzeczywistych, tworzy przestrzeń wektorową. Sprawdzić, czy następujące podzbiory tych ciągów są podprzestrzeniami wektorowymi:
 - a) ciągi zbieżne;
 - b) takie, dla których $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty$;
 - c) ciągi o skończonej liczbie wyrazów różnych od zera.Czy zbiór ciągów, które mają tylko jeden wyraz równy 1, a pozostałe zerowe, tworzy bazę którejś z przestrzeni?
3. Niech V będzie przestrzenią nad ciałem liczb zespolonych.
 - a) Wykazać, że jeśli zawęzić zakres liczb do $\mathbb{R}$, to V jest z niezmiennymi działaniami rzeczywistą przestrzenią wektorową; oznaczmy ją $V_{\mathbb{R}}$.
 - b) Jak najprościej skonstruować bazę przestrzeni $V_{\mathbb{R}}$, jeśli dana jest baza $(e_1, \dots, e_n)$ przestrzeni V ?
4. Dane są rozkłady wektorów w bazie $(e_1, \dots, e_n)$ przestrzeni rzeczywistej lub zespolonej. Sprawdzić, czy wektory $(f_1, \dots, f_n)$ również tworzą bazę; jeśli tak, to znaleźć rozkład wektora x w tej bazie.
 - a)

$$\begin{aligned}f_1 &= e_1, \\f_2 &= \alpha e_1 + e_2, \\f_3 &= \alpha e_2 + e_3, \\f_4 &= \alpha e_3 + e_4, \\x &= e_1 - 2e_2 + 3e_3 - 4e_4.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}f_1 &= (1 + 2i)e_1 + (2 + 3i)e_2, \\f_2 &= (2 - 2i)e_1 + (3 - 2i)e_2, \\x &= e_1 - ie_2.\end{aligned}$$