

ZADANIA Z ALGEBRY Z GEOMETRIĄ
ZESTAW 4.

1. Niech G będzie grupą, a h jej ustalonym elementem. Wykazać, że odwzorowania
 - a) $G \ni g \rightarrow g^{-1} \in G$,
 - b) $G \ni g \rightarrow h^{-1}gh \in G$są bijekcjami. Czy są one także automorfizmami?
2. Rozważamy grupę ilorazową $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$ multiplikatywnych grup liczbowych. Wykazać, że dla każdego $\epsilon > 0$ zachodzi $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^* = \{x\mathbb{Q}^* | x \in (0, \epsilon)\}$.
3. Wykazać, że zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ z działaniem $(a, b) \circ (a', b') = (a + ba', bb')$ tworzy grupę; nazwijmy ją $\mathbb{R} * \mathbb{R}^*$. Wykazać, że odwzorowanie $h: \mathbb{R} * \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $h(a, b) = b$, jest homomorfizmem tej grupy na grupę multiplikatywną $\mathbb{R}^*$. Wykazać, że grupa niezmiennicza $\text{Ker}h$ jest izomorficzna z grupą addytywną $\mathbb{R}$, a grupa ilorazowa $\mathbb{R} * \mathbb{R}^*/\text{Ker}h$ jest izomorficzna z grupą $\mathbb{R}^*$.
4. Niech X_r będzie zbiorem złożonym z liczb postaci $a + br$, gdzie r jest ustaloną liczbą niewymierną, a a i b są dowolnymi liczbami wymiernymi.
 - a) Kiedy $X_r = X_{r'}$?
 - b) Wykazać, że każdy ze zbiorów X_r jest podgrupą grupy addytywnej $\mathbb{R}$.
 - c) Proszę znaleźć wszystkie liczby r , dla których $X_r^* = X_r \setminus \{0\}$ są podgrupami grupy multiplikatywnej $\mathbb{R}^*$ i znaleźć zbiór takich liczb r , dla których grupy X_r są parami różne i wyczerpują wszystkie grupy tego typu.