

ZADANIA Z ALGEBRY Z GEOMETRIĄ  
ZESTAW 2.

1. Dla zbiorów  $A, B, C \subset X$  udowodnić równości:
  - a)  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ ;
  - b)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ;
  - c)  $A \cup (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ ;
  - d)  $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$ .
2. Niech  $X = \{a, b, c\}$ . Podać przykład relacji  $\mathcal{R} \subset X \times X$  będącej relacją
  - a) zwrotną,
  - b) symetryczną,
  - c) antysymetryczną,
  - d) przechodnią,
  - e) spójną.
3. W dziedzinie odwzorowania  $f: X \rightarrow Y$  określamy relację  $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ . Proszę wykazać, że jest to relacja równoważności. Proszę zapisać zbiór ilorazowy  $X/\sim$  przy pomocy pojęć obrazu i przeciwobrazu.
4. Niech  $f: X \rightarrow Y$ . Proszę wykazać, że:
  - a) dla każdego zbioru  $A \subseteq X$  zachodzi  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$  oraz dla każdego zbioru  $B \subseteq Y$  zachodzi  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ ;
  - b)  $f$  jest injekcją wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru  $A \subseteq X$  zachodzi  $f^{-1}(f(A)) = A$ ;
  - c)  $f$  jest surjekcją wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru  $B \subseteq Y$  zachodzi  $f(f^{-1}(B)) = B$ .
5. Proszę wykazać, że zbiór  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  jest równej mocy z  $\mathbb{N}$ .
6. Niech zbiór  $X$  będzie liniowo uporządkowany relacją  $\leq$ . Określamy w tym zbiorze działanie  $x \circ y = \max\{x, y\}$ . Proszę sprawdzić, czy działanie jest łączne. Jaki jest warunek istnienia elementu neutralnego? Czy istnieją wtedy elementy odwrotne?
7. W zbiorze  $X$  zadajemy działanie przepisem  $x \circ y = x$ . Proszę sprawdzić, czy to działanie jest łączne. Co można wywnioskować o zbiorze  $X$ , jeśli to działanie ma w nim element neutralny?