Zadania z Algebry z Geometrią
Zestaw 11.

1. Niech funkcja zespolona (lub rzeczywista) na osi rzeczywistej dana będzie jako suma szeregu o nieskończonym promieniu zbieżności. Wykazać, że jeśli operator w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej (lub rzeczywistej) ma w bazie (e_1, e_2) macierz

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

to macierz operatora $f(A)$ ma w tej samej bazie postać

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix},$$

gdzie f' jest pochodną funkcji f. Jak wynik zmieni się, jeśli element macierzy operatora A równy 1 zastąpić dowolnym parametrem μ?
2. Dany jest operator B w dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej. Znaleźć wszystkie operatory A będące rozwiązaniami równania $f(A) = B$ (jeśli istnieją dla danego B), gdzie (a) $f = \exp$, (b) $f = \sin$.
3. Metryka g na przestrzeni V ma w bazie $(e_1, \ldots, e_3)$ macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć jądro tej metryki, jego bazę, oraz bazę podprzestrzeni W takiej, że $V = \operatorname{Ker} g \oplus W$. Wyliczyć macierz metryki w bazie zgodnej z tym rozkładem.
4. Niech g będzie dowolną formą biliniową lub półtoraliniową na przestrzeni V, a $(f_1, \ldots, f_k)$ – dowolnym ciągiem wektorów w V. Wykazać, że jeśli macierz $(g(f_i, f_j))$ jest nieosobliwa, to wektory (f_i) sa liniowo niezależne.