Algebra z geometrią, wykład 23

Zagadnienia omówione w dniu 7 maja 2019

189. Dokończenie dowodu twierdzenia o rozkładzie polarnym operatora.

190. Wniosek z twierdzenia o rozkładzie polarnym: macierz operatora liniowego na przestrzeni unitarnej (euklidesowej) może być zapisana jako iloczyn macierzy dodatniej i macierzy unitarnej (ortogonalnej).

191. Wniosek z twierdzenia o rozkładzie polarnym: dla każdego operatora liniowego $\hat{T}$ na przestrzeni unitarnej (euklidesowej) istnieją takie bazy ortonormalne $(e_i)_{i=1,\ldots m}$, $(j_i)_{i=1,\ldots m}$, $m = \dim V$, że macierz A zdefiniowana równością

$$\hat{A}e_i = \sum_{j=1}^{m} f_j A^j{}_i$$

jest diagonalna.

192. Wniosek z twierdzenia o rozkładzie polarnym: macierz operatora liniowego $\hat{A}$ na przestrzeni unitarnej (euklidesowej) może być zapisana w postaci:

$$A = \gamma^{\dagger} \cdot D \cdot \beta, \qquad (\text{odpowiednio } \gamma^{\mathrm{T}} \cdot D \cdot \beta),$$

gdzie β i γ są (na ogół różnymi) macierzami unitarnymi (odpowiednio – ortogonalnymi).

193. Definicja operatora nilpotentnego.

194. Szkic dowodu istnienia w zespolonej p.w. V bazy, w której macierz $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ ma postać Jordana.

195. Twierdzenie: niech $g(u, v)$ będzie dodatnio określoną metryką definiującą na p.w. V strukturę przestrzeni unitarnej (euklidesowej). Każda półtoraliniowa (biliniowa) metryka $\tilde{g}$ na V może być zdefiniowana jako

$$\tilde{g}(u, v) = g\left(u, \hat{A}v\right)$$

gdzie $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$, przy czym $\tilde{g}$ jest hermitowska (symetryczna) wtw., gdy $\hat{A}$ jest samosprzężony.

196. Algorytm równoczesnej diagonalizacji dwóch form hermitowskich (symetrycznych), z których jedna jest dodatnio określona.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl