Algebra z geometrią, wykład 22

Zagadnienia omówione w dniu 30 kwietnia 2019

184. Sprowadzanie macierzy operatora ortogonalnego do najprostszej postaci.

     Tw. Dla każdego operatora ortogonalnego $\hat{O}$ istnieje baza ortonormalna, w której jego macierz ma postać

$$O = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_m & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & O(\varphi_1) & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & O(\varphi_k) \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } O(\varphi_i) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}.$$

185. Twierdzenie: niech $\hat{S} \in \mathrm{End}(V)$. Równoważne są warunki:

     (a) $\hat{S}$ jest izometrią,
     (b) $\langle \hat{S}u, \hat{S}v \rangle = \langle u, v \rangle$ dla wszystkich $u, v \in V$.
     (c) $\hat{S}^*\hat{S} = I_V$,
     (d) $(\hat{S}e_1, \ldots, \hat{S}e_n)$ jest ortonormalną listą wektorów z V w.t.w., gdy $(e_1, \ldots, e_n)$ jest ortonormalną listą wektorów z V,
     (e) istnieje ortonormalna baza $(e_1, \ldots, e_m)$ przestrzeni V taka, że $(\hat{S}e_1, \ldots, \hat{S}e_m)$ jest ortonormlaną bazą V,
     (f) $\hat{S}\hat{S}^* = I_V$,
     (g) $\hat{S}^*$ jest izometrią.

186. Definicja: operator $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ nazywamy dodatnim, gdy $\hat{A}$ jest samosprzężony i $(v, \hat{A}v) \geqslant 0$ dla wszystkich $v \in V$.

     Uwaga: jeśli V jest zespoloną p.w., to założenie o samosprzężoności nie jest potrzebne na mocy (wykazanego wcześniej) twierdzenia mówiącego, że operator na przestrzeni zespolonej jest samosprzężony w.t.w., gdy $(v, \hat{A}v) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $v \in V$.

187. Definicja pierwiastka z operatora dodatniego. Konstrukcja $\sqrt{\hat{A}}$.

188. Twierdzenie (rozkład biegunowy/polarny operatora) Jeśli $\hat{T} \in \mathrm{End}(V)$ to istnieje taka izometria $\hat{S} \in \mathrm{End}(V)$, że
$$\hat{T} = \hat{S}\sqrt{\hat{T}^*\hat{T}}.$$

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl