Algebra z geometrią, wykład 18

Zagadnienia omówione w dniu 26 marca 2019

152. Sprowadzanie metodą Lagrange'a formy kwadratowej do sumy kwadratów – przypadek symetryczny.

153. Twierdzenie (ortogonalizacja metodą Grama-Schmidta):

 Niech $\{f_i\}_1^m$ będzie bazą w ortogonalnej lub hermitowskiej przestrzeni wektorowej V taką, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, m$ przestrzenie $\mathrm{span}(f_1, \ldots, f_k)$ są niezdegenerowane. Definiujemy $\Delta_k = \det(G_{ij})_{i,j,\leqslant k}$ oraz $(e_1, \ldots, e_m) = (f_1, \ldots, f_m)\beta$, gdzie β jest macierzą o jedynkach na diagonali i zerach pod diagonalą

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & 1 & \cdots & \bullet \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

 Wtedy
 1) $\forall k: \ \ \mathrm{span}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_k)$,
 2) istnieje dokładnie jedna macierz β o postaci jak wyżej, dla której $\{e_i\}$ jest bazą ortogonalną,
 3) ortogonalna baza $\{e_i\}$ spełnia $g(e_1, e_1) = \Delta_1, \ g(e_k, e_k) = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \ k = 2, \ldots, m$ i może być otrzymana rekurencyjnie:

$$e_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{g(e_i, f_{k+1})}{g(e_i, e_i)} \ e_i.$$

154. Lemat: przy założeniach i oznaczeniach jak w poprzednim punkcie sygnatura hermitowskiej lub symetryczne metryki określona jest ciągiem znaków liczb $\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}$.

155. Definicja metryki dodatnio określonej.

156. Lemat: Metryka jest dodatnio określona w.t.w., gdy jej macierz w bazie kanonicznej jest macierzą jednostkową.

157. Kryterium Sylwestera dodatniej określoności metryki.

158. Twierdzenie: niech (V, g) będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ z niezdegenerowanym (symetrycznym, hermitowskim lub symplektycznym) iloczynem skalarnym. Odwzorowanie

$$V \ \ni \ x \ \ \to \ \ g(x, \cdot) \ \in \ \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) \ \equiv \ V^*$$

 jest (anty)izomorfizmem.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl