**Szczegółowa lista zagadnień kursu „Algebra z geometrią MT”
obowiązujących na egzamin ustny w roku akademickim 2018/19**

1. Zbiory, zdania i formy zdaniowe.
2. Operacje logiczne i podstawowe prawa rachunku zdań.
3. Algebra zbiorów. Iloczyn kartezjański zbiorów.
4. Definicja relacji.
5. Relacja zwrotna, symetryczna, antysymetryczna, przechodnia i spójna.
6. Relacja równoważności. Klasy równoważności. Przykłady.
7. Twierdzenie: jeśli $\mathcal{R} \subset X \times X$ jest relacją równoważności, to dla wszystkich $x, y \in X$:
$$[x] \cap [y] \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad [x] = [y]$$
8. Twierdzenie: podział zbioru X na rozłączne podzbiory definiuje relację równoważności na X.
9. Relacja częściowego porządku i relacja porządku. Przykłady
10. Ogólna relacja binarna.
11. Funkcja: definicja, pojęcia dziedziny, przeciwdziedziny, obrazu i przeciwobrazu zbioru.
12. Pojęcia surjekcji, injekcji i bijekcji.
13. Twierdzenie: relacja odwrotna do bijekcji jest bijekcją.
14. Pojęcie złożenia funkcji.
15. Relacja równoliczności na przestrzeni zbiorów.
16. Działania, działanie wewnętrzne i zewnętrzne. Elementy neutralne i odwrotne.
17. Definicja grupy i grupy abelowej (przemiennej).
18. Przykłady grup. Grupa transformacji trójkąta równobocznego. Grupa cykliczna rzędu m.
19. Jedyność elementu neutralnego i elementu odwrotnego dla danego elementu grupy.
20. Lemat: dla wszystkich $g, h \in G$: $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$.
21. Definicja podgrupy.
22. Twierdzenie: $H \subset G$ jest podgrupą w.t.w. gdy
    a) $\forall\ h_1, h_2 \in H :\ h_1 \circ h_2 \in H$,
    b) $\forall\ h \in H :\ h^{-1} \in H$.

23. Relacje
$$g_1\mathcal{R}^l_H g_2 \;\Leftrightarrow\; g_1^{-1}\circ g_2 \in H, \qquad g_1\mathcal{R}^r_H g_2 \;\Leftrightarrow\; g_1\circ g_2^{-1} \in H,$$
jako relacje równoważności. Lewo- i prawostronne warstwy grupy G względem podgrupy H.

24. Podgrupy niezmiennicze i grupy ilorazowe.

25. Poprawność definicji działania dla grupy ilorazowej.

26. Definicja homomorfizmu i izomorfizmu grup.

27. Lemat: jeśli $g:\ G \to G'$ jest homomorfizmem, to $h(e) = e'$ oraz dla każdego $g \in G:\ h(g^{-1}) = h(g)^{-1}$.

28. Obraz i jądro homomorfizmu.

29. Twierdzenie: Jeśli $h:\ G \to G'$ jest homomorfizmem, to $\operatorname{Im} h$ jest podgrupą G', a $\operatorname{Ker} h$ jest podgrupą niezmienniczą G.

30. Twierdzenie: Niech $h:\ G \to G'$ będzie homomorfizmem. Odwzorowanie h jest różnowartościowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Ker} h = \{e\}$.

31. Twierdzenie: Złożenie izomorfizmów jest izomorfizmem. Odwzorowanie odwrotne do izmorfizmu jest izomorfizmem.

32. Definicja ciała.

33. Twierdzenie 4.4: W każdym ciele: $0x = x0 = 0$, $(-x)y = -(xy) = x(-y)$ oraz $xy = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \vee\ y = 0$.

34. Przykłady ciał.

35. Charakterystyka ciała liczbowego. Ciało $\mathbb{Z}_p$ dla p będącego liczbą pierwszą.

36. Definicja zbioru liczb zespolonych i zadanych na nim działań. Dowód, że struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem.

37. Izomorfizm ciała liczb zespolonych postaci $(x, 0)$ i ciała liczb rzeczywistych. Część rzeczywista i urojona liczny zespolonej.

38. Płaszczyzna Gaussa.

39. Moduł liczby zespolonej. Sprzężenie zespolone, równości $|z|^2 = z\bar{z}$ i $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$.

40. Twierdzenie 5.1. Dla dowolnej pary liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzi:

    a) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

    b) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, (nierówność trójkąta),

    c) $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$.

41. Argument liczby zespolonej i jej reprezentacja trygonometryczna.

42. Pierwiastki liczby zespolonej.

43. Reprezentacja wykładnicza liczby zespolonej.

44. Sformułowanie „zasadniczego twierdzenia algebry".

45. Rozkład wielomianu o współczynnikach zespolonych nad $\mathbb{C}$ i wielomianu o współczynnikach rzeczywistych nad $\mathbb{R}$.

46. Grupy odwzorowań. Grupa symetryczna zbioru X.

47. Grupa permutacji. Izomorficzność grup permutacji zbiorów równolicznych.

48. Zapis permutacji $\sigma \in S_n$; składanie permutacji.

49. Rozkład permutacji na cykle rozłączne. Pojęcie transpozycji.

50. Pojęcie inwersji w ciągu liczbowym.

51. Lemat: Zamiana miejscami dwóch wyrazów w różnowartościowym ciągu liczb naturalnych prowadzi do zmiany liczby inwersji o liczbę nieparzystą.

52. Znak i parzystość permutacji.

53. Twierdzenie: Niech X będzie zbiorem skończonym i niech

$$S_X \ \ni \ p = t_s \circ t_{s-1} \circ \ldots \circ t_1$$

będzie rozkładem permutacji p na transpozycje. Liczba transpozycji w dowolnym rozkładzie p na transpozycje różni się od s o liczbę parzystą.

54. Wniosek z Tw. 53: przy oznaczeniach jak powyżej liczba $\operatorname{sgn} p = (-1)^s$ nie zależy od rozkładu p na transpozycje.

55. Twierdzenie Cayley'a: każda grupa skończona rzędu n jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy S_n. *(dowód – dla chętnych).*

56. Definicja macierzy.

57. Macierz kolumnowa, wierszowa i kwadratowa.

58. Podstawowe operacje na macierzach: dodawanie i mnożenie przez liczbę.

59. Mnożenie macierzy; łączność mnożenia macierzowego.

60. Transpozycja, sprzężenie zespolone i sprzężenie hermitowskie macierzy.

61. Ślad macierzy kwadratowej. Cykliczność śladu iloczynu macierzy.

62. Macierz jednostkowa. Półgrupa macierzy kwadratowych (z mnożeniem macierzy jako operacją grupową).

63. Definicja macierzy nieosobliwej. Grupa $\mathrm{GL}(m, \mathbb{K})$.

64. Warunek konieczny i wystarczający istnienia macierzy odwrotnej dla macierzy 2×2.

65. Definicja wyznacznika jako liniowej i całkowicie antysymetrycznej funkcji kolumn macierzy unormowanej warunkiem $\det \mathbf{1} = 1$.

66. Jawne wyrażenie na wyznacznik macierzy przy użyciu symbolu całkowicie antysymetrycznego,
$$\det A = \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_m=1}^{m} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m} A^{i_1}{}_1 \dots A^{i_m}{}_m .$$

67. Dowód relacji $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$.

68. Tożsamość
$$\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_m=1}^{m} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_m} A^{i_1}{}_{j_1} \dots A^{i_m}{}_{j_m} \; = \; \det A \, \varepsilon_{j_1 j_1 \dots j_m}$$
i twierdzenie Cauchy'ego: dla $A, B \in \mathbb{K}^{m \times m}$:
$$\det(AB) = \det A \, \det B.$$

69. Definicja minora.

70. Wyprowadzenie rozwinięcia Laplace'a:
$$\det A = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} A^i{}_j M_{ij} \; = \; \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} A^i{}_j M_{ij}.$$

71. Jawne wyrażenie na macierz odwrotną do nieosobliwej macierzy $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$.

72. Twierdzenie: macierz odwrotna do macierzy $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ istnieje wtw. gdy $\det A \neq 0$.

73. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań Cramerowskiego układu równań. Wzory Cramera.

74. Definicja i przykłady przestrzeni wektorowych.

75. Podprzestrzeń przestrzeni wektorowych.

76. Suma i suma prosta podprzestrzeni przestrzeni wektorowej.

77. Definicja kombinacji liniowej wektorów. Wektory liniowo niezależne i liniowo zależne.

78. Podprzestrzeń rozpinana przez zbiór wektorów. Przestrzenie skończenie- i nieskończenie wymiarowe.

79. Lemat: jeśli $(v_1, \dots, v_m)$ jest listą wektorów liniowo zależnych i $v_1 \neq 0$, to istnieje taki $j \in \{2, \dots, m\}$ że:

    (a) $v_j \in \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_{j-1}\}$,

(b) jeśli z listy $(v_1, \ldots, v_m)$ usuniemy wektor v_j, to przestrzeń rozpinana przez pozostałe wektory równa jest $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$.

80. Twierdzenie: w przestrzeni wektorowej V o skończonym wymiarze długość listy wektorów liniowo niezależnych jest nie większa od długości listy wektorów rozpinających V.

81. Twierdzenie: każda podprzestrzeń skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V ma skończony wymiar.

82. Definicja bazy przestrzeni wektorowej.

83. Twierdzenie: lista $(v_1, \ldots, v_m)$ wektorów p.w. V tworzy bazę wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor z V może być w jednoznaczny sposób przedstawiony jako ich kombinacja liniowa.

84. Twierdzenie: każda skończona lista wektorów rozpinających przestrzeń wektorową może być zredukowana do bazy tej przestrzeni.

85. Wniosek: każda skończenie wymiarowa przestrzeń wektorowa ma bazę.

86. Twierdzenie: każda lista liniowo niezależnych wektorów, elementów skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej, może być uzupełniona do bazy tej przestrzeni.

87. Twierdzenie: wszystkie bazy zadanej przestrzeni wektorowej mają tę samą liczbę elementów.

88. Definicja wymiaru przestrzeni wektorowej.

89. Twierdzenie: równoważne są warunki:

    (a) lista wektorów $(v_1, \ldots, v_m)$ jest bazą przestrzeni wektorowej V,

    (b) lista wektorów $(v_1, \ldots, v_m)$ ma długość równą wymiarowi przestrzeni V i jej elementy są liniowo niezależne,

    (c) lista wektorów $(v_1, \ldots, v_m)$ ma długość równą wymiarowi przestrzeni V i jej elementy rozpinają tę przestrzeń.

90. Twierdzenie: jeśli U_1, U_2 są podprzestrzeniami p.w. V takimi, żę $V = U_1 + U_2$, to

$$\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

91. Lemat: niech V będzie skończenie wymiarową p.w. i niech $b, a_1, \ldots, a_m \in V$. Wektor b może być przedstawiony jako kombinacja liniowa wektorów a_i wtw., gdy

$$\operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\} = \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n, b\}.$$

92. Lemat: niech V będzie skończenie wymiarową p.w. i niech $b, a_1, \ldots, a_m \in V$. Wektor b może być przedstawiony jako kombinacja liniowa wektorów a_i wtw., gdy

$$\dim \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n\} = \dim \operatorname{span}\{a_1, \ldots, a_n, b\}.$$

93. Definicja ogólnego układu równań liniowych jako równania macierzowego $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, x \in \mathbb{K}^n, b \in \mathbb{K}^m$.

94. Definicja rzędu macierzy

95. Wniosek (twierdzenie Kroneckera-Capelliego): rozwiązanie ogólnego układu równań istnieje wtw., gdy $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|b)$.

96. Lemat: rząd macierzy A równy jest rozmiarowi jej największego, nieznikającego minora.

97. Algorytm rozwiązywania ogólnego układu równań liniowych.

98. Definicja odwzorowania liniowego między przestrzeniami wektorowymi. Przykłady odwzorowań liniowych.

99. $\mathrm{Hom}(V, W)$ jako przestrzeń wektorowa.

100. Definicja jądra i obrazu odwzorowania liniowego.

101. Definicja ciągu dokładnego odwzorowań liniowych.

102. Twierdzenie: odwzorowania liniowe $\hat{A}: V \to W$ jest injekcją wtw., gdy $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{0\}$.

103. Lemat: Niech $\hat{A} \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Wówczas $\operatorname{Ker} \hat{A}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V a $\operatorname{Im} \hat{A}$ jest podprzestrzenią W.

104. Twierdzenie: Niech $\hat{A} \in \mathrm{Hom}(V, W)$ i niech $\dim V < \infty$. Wówczas
$$\dim\, \operatorname{Ker} \hat{A} + \dim\, \operatorname{Im} \hat{A} = \dim V.$$

105. Wniosek: jeśli $\dim V > \dim W$, to nie istnieje różnowartościowe odwzorowanie liniowe $V \to W$.

106. Wniosek: jeśli $\dim V < \dim W$, to nie istnieje surjektywne odwzorowanie liniowe $V \to W$.

107. Definicja pojęcia izomorfizmu, endomorfizmu i automorfizmu. Izomorfizm przestrzeni wektorowych.

108. Lemat: przestrzenie wektorowe (nad tym samym ciałem) V i W są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim\, V = \dim\, W$.

109. Definicja macierzy odwzorowania liniowego (w zadanych bazach).

110. Związek składania odwzorowań liniowych z mnożeniem ich macierzy.

111. Lemat: przestrzenie $\mathrm{Hom(V, W)}$ i $\mathbb{K}^{\dim W \times \dim V}$ są izomorficzne.

112. Wniosek: $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$.

113. Definicja macierzy przejścia między dwiema bazami przestrzeni wektorowej V.

114. Lemat: macierz przejścia między dwiema bazami przestrzeni wektorowej V jest nieosobliwa.

115. Zmiana postaci macierzy odwzorowania liniowego $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ przy zmianie bazy w p.w. V.

116. Definicja śladu i wyznacznika $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ w zadanej bazie; niezależność $\mathrm{Tr}\,\hat{A}$ i $\det \hat{A}$ od wyboru bazy.

117. Twierdzenie: $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ jest bijekcją w.t.w. gdy $\det \hat{A} \neq 0$.

126. Definicja wartości własnej i wektora własnego endomorfizmu.

127. Algorytm wyznaczania wartości i wektorów własnych endomorfizmu.

128. Macierz endomorfizmu w bazie jego wektorów własnych.

129. Twierdzenie: każdy endomorfizm skończenie wymiarowej, zespolonej p.w. ma co najmniej jedną wartość własną i co najmniej jeden wektor własny.

130. Twierdzenie: wektory własne do różnych wartości własnych są liniowo niezależne.

131. Wniosek: jeśli $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ ma $m = \dim V$ różnych wartości własnych, to w V istnieje baza złożona z wektorów własnych $\hat{A}$.

132. Definicja podprzestrzeni niezmienniczej endomorfizmu.

133. Lemat.

     Niech $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ i niech $(v_1, \ldots, v_m)$ będzie bazą V. Równoważne są warunki:

     (a) macierz operatora $\hat{A}$ w bazie $(v_1, \ldots, v_m)$ jest macierzą górnotrójkątną;

     (b) $\hat{A}v_k \in \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, m$;

     (c) $\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ są podprzestrzeniami niezmienniczymi $\hat{A}$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, m$.

134. Twierdzenie: niech V będzie zespoloną p.w. i niech $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$. W V istnieje baza, w której macierz $\hat{A}$ jest górnotrójkątna.

135. Obserwacja: wartości na diagonali macierzy operatora $\hat{A}$ w bazie, w której macierz ta jest górnotrójkątna, są równe wartościom własnym $\hat{A}$.

136. Definicja iloczynu skalarnego (metryki) na p.w. V. Metryka biliniowa i metryka półtoraliniowa.

137. Macierz metryki w bazie. Postać transformacji macierzy metryki przy zmianie bazy.

138. Metryka symetryczna, hermitowska i symplektyczna.

139. Pojęcie ortogonalności wektorów i dopełnienia ortogonalnego podprzestrzeni.

140. Jądro metryki.

141. Lemat: niech g będzie metryką na p.w. V zaś G i X macierzą metryki g i macierzą współrzędnych wektora $x \in V$ w dowolnej bazie V. Wówczas

$$x \in \mathrm{Ker}\, g \;\Leftrightarrow\; GX = 0.$$

142. Pojęcia niezdegenerowanej metryki i niezdegenerowanej podprzestrzeni przestrzeni z metryką.

143. Twierdzenie: niech W będzie nezdegenerowaną podprzestrzenią p.w. V. Wówczas

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

144. Definicja formy kwadratowej związanej z metryką.

145. Tożsamości polaryzacyjne dla metryk symetrycznych i półtoraliniowych.

146. Twierdzenie: metryka półtoraliniowa jest hermitowska wtedy i tylko wtedy, gdy związana z nią forma kwadratowa przyjmuje jedynie wartości rzeczywiste.

147. Twierdzenie o postaci kanonicznej metryki symetrycznej, hermitowskiej i symplektycznej. Sygnatura metryki.

148. Definicja izometryczności przestrzeni z metryką.

149. Twierdzenie: dwie przestrzenie z metryką są izometryczne wtedy i tylko wtedy, gdy obie metryki mają tę samą sygnaturę.

150. Sprowadzanie metodą Lagrange'a formy kwadratowej do sumy kwadratów – przypadek symetryczny.

151. Sprowadzanie metodą Lagrange'a formy kwadratowej do sumy kwadratów – przypadek symetryczny.

152. Twierdzenie (ortogonalizacja metodą Grama-Schmidta):

Niech $\{f_i\}_1^m$ będzie bazą w ortogonalnej lub hermitowskiej przestrzeni wektorowej V taką, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, m$ przestrzenie $\mathrm{span}(f_1, \ldots, f_k)$ są niezdegenerowane. Definiujemy $\Delta_k = \det(G_{ij})_{i,j,\leqslant k}$ oraz $(e_1, \ldots, e_m) = (f_1, \ldots, f_m)\beta$, gdzie β jest macierzą o jedynkach na diagonali i zerach pod diagonalą

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & 1 & \cdots & \bullet \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Wtedy
1) $\forall k: \ \mathrm{span}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_k)$,
2) istnieje dokładnie jedna macierz β o postaci jak wyżej, dla której $\{e_i\}$ jest bazą ortogonalną,
3) ortogonalna baza $\{e_i\}$ spełnia $g(e_1, e_1) = \Delta_1$, $g(e_k, e_k) = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$, $k = 2, \ldots, m$ i może być otrzymana rekurencyjnie:

$$e_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{g(e_i, f_{k+1})}{g(e_i, e_i)} \ e_i.$$

153. Lemat: przy założeniach i oznaczeniach jak w poprzednim punkcie sygnatura hermitowskiej lub symetryczne metryki określona jest ciągiem znaków liczb $\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}$.

154. Definicja metryki dodatnio określonej.

155. Lemat: Metryka jest dodatnio określona w.t.w., gdy jej macierz w bazie kanonicznej jest macierzą jednostkową.

156. Kryterium Sylwestera dodatniej określoności metryki.

157. Twierdzenie: niech (V, g) będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ z niezdegenerowanym (symetrycznym, hermitowskim lub symplektycznym) iloczynem skalarnym. Odwrorowanie
$$V \ni x \ \rightarrow \ g(x, \cdot) \ \in \ \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) \ \equiv \ V^*$$
jest (anty)izomorfizmem.

158. Definicja operacji sprzężenia dla endomorfizmu hermitowskiej, ortogonalnej lub symplektycznej przestrzeni wektorowej z niezdegenerowanym iloczynem skalarnym.

159. Dowód twierdzenia, że $\hat{A}^*$ jest operatorem liniowym.

160. Podstawowe własności operacji sprzężenia endomorfizmu.

161. Związek między macierzami operatorów $\hat{A}$ i $\hat{A}^*$.

162. Definicja operatora samosprzężonego.

163. Definicja przestrzeni unitarnej i euklidesowej.

164. Definicja normy wektora na przestrzeni unitarnej i euklidesowej.

165. Twierdzenie Pitagorasa.

166. Rozkład zadanego wektora u na wektor proporcjonalny doa zadanego wektora v i wektor ortogonalny do v.

167. Nierówność Schwarza (wraz z dowodem).

168. Nierówność trójkąta (wraz z dowodem).

169. Wyprowadzenie dla $u, v \in V$ i $\{e_i\}-$ ortonormalnej bazy V, równości:
$$v \ = \ \sum_i (e_i, v)\, e_i, \qquad\qquad (u, v) \ = \ \sum_i (u, e_i)(e_i, v).$$

170. Lemat: wartości własne samosprzężonego operatora na przestrzeni unitarnej są liczbami rzeczywistymi.

171. Lemat: podprzestrzenie własne samosprzężonego operatora na przestrzeni unitarnej lub euklidesowej są do siebie wzajemnie ortogonalne (równoważnie: wektory własne do różnych wartości własnych są względem siebie ortogonalne).

172. Twierdzenie: dla samosprzężonego operatora $\hat{A}$ na przestrzeni unitarnej istnieje baza ortonormalna (zbudowana z wektorów własnych $\hat{A}$), w której macierz operatora $\hat{A}$ jest diagonalna.

173. Twierdzenie: dla samosprzężonego operatora $\hat{A}$ na przestrzeni euklidesowej istnieje baza ortonormalna (zbudowana z wektorów własnych $\hat{A}$), w której macierz operatora $\hat{A}$ jest diagonalna.

174. Algorytm wyznaczania bazy ortonormalnej, w której macierz samosprzężonego operatora $\hat{A}$ na przestrzeni unitarnej lub euklidesowej jest diagonalna.

175. Definicja i własności operatorów rzutowych na przestrzeni unitarnej i euklidesowej.

176. Sformułowanie twierdzenia spektralnego dla samosprzężonego operatora na przestrzeni unitarnej lub euklidesowej wykorzystujące spektralny rozkład jedności.

177. Definicja komutatora operatorów oraz pojęcia układu operatorów komutujących.

178. Twierdzenie o istnieniu w przestrzeni unitarnej (euklidesowej) bazy ortonormalnej, w której macierze dwóch (ogólnie: n) komutujących operatorów samosprzężonych (ogólnie: parami komutujących operatorów samosprzężonych) są diagonalne.

179. Definicja operatora normalnego.

180. Twierdzenie: operator liniowy na przestrzeni unitarnej jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on operatorem normalnym.

181. Definicja operatora izometrycznego, unitarnego i ortogonalnego.

182. Twierdzenie spektralne dla operatorów unitarnych.

183. Sprowadzanie macierzy operatora ortogonalnego do najprostszej postaci.

    Tw. Dla każdego operatora ortogonalnego $\hat{O}$ istnieje baza ortonormalna, w której jego macierz ma postać

$$O = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_m & \mathbf{0} & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & O(\varphi_1) & \cdot & \mathbf{0} \\ . & . & . & \ddots & . \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & O(\varphi_k) \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \;\; O(\varphi_i) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}.$$

184. Twierdzenie: niech $\hat{S} \in \mathrm{End}(V)$. Równoważne są warunki:

    (a) $\hat{S}$ jest izometrią,

    (b) $\langle \hat{S}u, \hat{S}v \rangle = \langle u, v \rangle$ dla wszystkich $u, v \in V$.

    (c) $\hat{S}^*\hat{S} = I_V$,

    (d) $(\hat{S}e_1, \ldots, \hat{S}e_n)$ jest ortonormalną listą wektorów z V w.t.w., gdy $(e_1, \ldots, e_n)$ jest ortonormalną listą wektorów z V,

    (e) istnieje ortonormalna baza $(e_1, \ldots, e_m)$ przestrzeni V taka, że $(\hat{S}e_1, \ldots, \hat{S}e_m)$ jest ortonormlaną bazą V,

    (f) $\hat{S}\hat{S}^* = I_V$,

(g) $\hat{S}^*$ jest izometrią.

185. Definicja: operator $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ nazywamy dodatnim, gdy $\hat{A}$ jest samosprzężony i $(v, \hat{A}v) \geqslant 0$ dla wszystkich $v \in V$.

Uwaga: jeśli V jest zespoloną p.w., to założenie o samosprzężoności nie jest potrzebne na mocy (wykazanego wcześniej) twierdzenia mówiącego, że operator na przestrzeni zespolonej jest samosprzężony w.t.w., gdy $(v, \hat{A}v) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $v \in V$.

186. Definicja pierwiastka z operatora dodatniego. Konstrukcja $\sqrt{\hat{A}}$.

187. Twierdzenie (rozkład biegunowy/polarny operatora) Jeśli $\hat{T} \in \mathrm{End}(V)$ to istnieje taka izometria $\hat{S} \in \mathrm{End}(V)$, że

$$\hat{T} = \hat{S}\sqrt{\hat{T}^*\hat{T}}.$$

Dowód w przypadku gdy $\det T = 0$ — dla ambitnych.

188. Wniosek z twierdzenia o rozkładzie polarnym: macierz operatora liniowego na przestrzeni unitarnej (euklidesowej) może być zapisana jako iloczyn macierzy dodatniej i macierzy unitarnej (ortogonalnej).

189. Wniosek z twierdzenia o rozkładzie polarnym: dla każdego operatora liniowego $\hat{T}$ na przestrzeni unitarnej (euklidesowej) istnieją takie bazy ortonormalne $(e_i)_{i=1,\dots m}$, $(j_i)_{i=1,\dots m}$, $m = \dim V$, że macierz A zdefiniowana równością

$$\hat{A}e_i = \sum_{j=1}^{m} f_j A^j{}_i$$

jest diagonalna.

190. Wniosek z twierdzenia o rozkładzie polarnym: macierz operatora liniowego $\hat{A}$ na przestrzeni unitarnej (euklidesowej) może być zapisana w postaci:

$$A = \gamma^\dagger \cdot D \cdot \beta, \qquad (\text{odpowiednio } \ \gamma^{\mathrm{T}} \cdot D \cdot \beta),$$

gdzie β i γ są (na ogół różnymi) macierzami unitarnymi (odpowiednio – ortogonalnymi).

191. Definicja operatora nilpotentnego.

192. Sformułowanie twierdzenia o istnieniu w zespolonej p.w. V bazy, w której macierz $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ ma postać Jordana.

193. Twierdzenie: niech $g(u, v)$ będzie dodatnio określoną metryką definiującą na p.w. V strukturę przestrzeni unitarnej (euklidesowej). Każda półtoraliniowa (biliniowa) metryka $\tilde{g}$ na V może być zdefiniowana jako

$$\tilde{g}(u, v) = g\left(u, \hat{A}v\right)$$

gdzie $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$, przy czym $\tilde{g}$ jest hermitowska (symetryczna) wtw., gdy $\hat{A}$ jest samosprzężony.

194. Algorytm równoczesnej diagonalizacji dwóch form hermitowskich (symetrycznych), z których jedna jest dodatnio określona.

195. Przestrzeń dualna do przestrzeni wektorowej.

196. Zbiór wektorów $\{e^i\}$ w V^* dualnych do zadanej bazy $\{e_i\}$ przestrzeni V. Liniowa niezależność wektorów e^i, izomorficzność przestrzeni V i V^* dla skończenie wymiarowych przestrzeni V.

197. Odwzorowanie transponowane do $\hat{A} \in \mathrm{Hom}(V, W)$; tożsamość $(\hat{A}\hat{B})^t = \hat{B}^t \hat{A}^t$.

198. Przestrzeń podwójnie dualna do V.

199. Odwzorowanie
$$V \ni v \to v^{**} \in V^{**}$$
zadane wzorem
$$\forall\ \phi \in V^* :\quad \phi(v) = v^{**}(\phi)$$
i kanoniczny izomorfizm V i V^{**} dla $\dim V < \infty$.

200. Definicja tensora o walencji $\binom{p}{q}$ jako odwzorowania wieloliniowego
$$t:\ \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p\ \text{razy}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q\ \text{razy}} \to \mathbb{K}.$$

201. Przestrzenie wektorowe T^p_q.

202. Przykłady tensorów i izomorfizmy $T^1_0 \cong V,\ T^0_1 \cong V^*,\ T^1_1 \cong \mathrm{end}(V)$.

203. Metryka na rzeczywistej przestrzeni wektorowej V jako element przestrzeni T^0_2.

204. Współrzędne tensora w zadanej bazie przestrzeni V.

205. Prawo transformacyjne dla współrzędnych tensora przy zmianie bazy.

206. Definicja iloczynu tensorowego.

207. Tensory
$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$$
jako baza przestrzeni T^p_q.

208. Symetryzacja i antysymetryzacja tensora w grupie wskaźników. Tensory całkowicie symetryczne i całkowicie antysymetryczne.

209. Tensor metryczny. Operacje podnoszenia i opuszczania indeksów.

210. Objętość wieloboku.

211. Definicja przestrzeni afinicznej.

212. Podprzestrzenie liniowe przestrzeni afinicznej.

213. Równanie parametryczne prostej i płaszczyzny.

214. Równanie normalne płaszczyzny i równanie wektorowe prostej.