Algebra z geometrią, zestaw 2_14

W wszystkich zadaniach poniżej zakładamy, że w trójwymiarowej przestrzeni afinicznej wyróżniliśmy pewien punkt p; przez wektor wodzący $\boldsymbol{r}$ punktu q rozumiemy wektor $\boldsymbol{r} = q - p$.

2_14.1. Niech ε^{ijk} oznacza symbol Levi-Civity. Korzystając z tożsamości

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{klm} = \delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl}$$

i definicji iloczynu wektorowego w postaci

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} a^j b^k$$

proszę wyprowadzić wzór na podwójny iloczyn wektorowy

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).$$

2_14.2. Proszę wyznaczyć postać wektora wodzącego punktu przecięcia prostej o równaniu wektorowym $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ i płaszczyzny o równaniu $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = \alpha$.

Wskazówka: proszę pomnożyć równanie prostej wektorowo przez $\boldsymbol{n}$ i skorzystać z poprzedniego zadania.

2_14.3. Proszę wyznaczyć równanie wektorowe prostej przechodzącej przez punkt o wektorze wodzącym $\boldsymbol{r}_1$ i przecinającej prostą o równaniu $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ pod kątem prostym.

2_14.4. W przypadku gdy proste o równaniach

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_1 &= \boldsymbol{b}_1, \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{b}_2, \end{aligned}$$

przecinają się, proszę wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia.

2_14.5. Proszę znaleźć równanie prostej będącej częścią wspólną płaszczyzn o równaniach $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{r} = \alpha_1$ i $\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{r} = \alpha_2$.

2_14.6. Proszę wyznaczyć równanie płaszczyzny zawierającej prostą $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ i punkt o wektorze wodzącym $\boldsymbol{r}_0$.

2_14.7. Proszę znaleźć warunki konieczne, by proste o równaniach $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1$ i $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2$ leżały w jednej płaszczyźnie a następnie znaleźć równanie tej płaszczyzny.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl