Algebra z geometrią, zestaw 2_13

2_13.1. Niech V, U, W będą p.w. nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $(e_i), (f_j)$ i (g_k) będą bazami tych przestrzeni. Proszę sprawdzić, czy wektor

$$-6e_1 \otimes f_1 \otimes g_1 + 18e_1 \otimes f_1 \otimes g_2 - 10e_1 \otimes f_2 \otimes g_1 + 30e_1 \otimes f_2 \otimes g_2$$
$$+3e_2 \otimes f_1 \otimes g_1 - 9e_2 \otimes f_1 \otimes g_2 + 5e_2 \otimes f_2 \otimes g_1 - 15e_2 \otimes f_2 \otimes g_2$$

może być zapisany jako $v \otimes u \otimes w$ dla pewnych $v \in V, u \in U, w \in W$.

2_13.2. Niech V oraz W będą p.w. nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$ i niech $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ oraz $\hat{B} \in \mathrm{End}(W)$ Definiujemy $\hat{A} \otimes \hat{B} \in \mathrm{End}(V \otimes W)$ warunkiem

$$\forall v \in V, w \in w : \left(\hat{A} \otimes \hat{B}\right)(v \otimes w) = \hat{A}v \otimes \hat{B}w.$$

Wybieramy w V bazę (e_i) zaś w W bazę (f_j). Proszę wykazać, że macierz operatora $\hat{A} \otimes \hat{B}$ w uporządkowanej leksykograficznie bazie $(e_i \otimes f_j)$ ma postać blokową

$$\begin{pmatrix} A^1{}_1\boldsymbol{B} & A^1{}_2\boldsymbol{B} & \dots & A^1{}_m\boldsymbol{B} \\ A^2{}_1\boldsymbol{B} & A^2{}_2\boldsymbol{B} & \dots & A^2{}_m\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A^m{}_1\boldsymbol{B} & A^m{}_2\boldsymbol{B} & \dots & A^m{}_m\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

oraz wyliczyć ślad operatora $\hat{A} \otimes \hat{B}$ jako funkcję śladów operatorów $\hat{A}$ i $\hat{B}$.

2_13.3. Przestrzeń $V \otimes V^*$ może być kanonicznie utożsamiona z przestrzenią $\mathrm{End}(V)$. Jaka operacja tensorowa odpowiada w tym utożsamieniu operacji śladu operatora?

2_13.4. Niech g i g' będą biliniowymi metrykami na skończenie wymiarowych przestrzeniach rzeczywistych V i V'.

(a) Proszę udowodnić, że istnieje jedyna metryka G na $V \otimes V'$ taka, że dla wszystkich $v, u \in V, v', u' \in V'$:
$$G(v \otimes v', u \otimes u') = g(v, u), g'(v', u').$$
Jaką symetrię posiada metryka G gdy g i g' są symetryczne a jaką wtedy, gdy g jest symetryczna, a $g'-$ symplektyczna?

(b) Niech (e_i) będzie bazą V a (e'_j) będzie bazą V'. Proszę wyliczyć macierz metryki G w bazie $(e_i \otimes e'_j)$.

(c) Proszę wyrazić niezmienniki metryki G przez niezmienniki metryk g i g'.

verté!

2_13.5. Kontrakcję C^r_s tensora $t \in \mathcal{T}^p_q(V)$ zdefiniowaliśmy na wykładzie zapisanym we współrzędnych wzorem

$$(C^r_s t)^{i_1 \ldots i_{p-1}}{}_{j_1 \ldots j_{q-1}} = \sum_{k=1}^{\dim V} t^{i_1 \ldots i_{r-1} k i_{r+1} \ldots i_{p-1}}{}_{j_1 \ldots j_{s-1} k j_{s+1} \ldots j_{q-1}}.$$

(a) Proszę udowodnić, że dla $v_i \in V, \varphi^j \in V^*$

$$\begin{aligned} & C^r_s \left(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \otimes \varphi^1 \otimes \ldots \otimes \varphi^q \right) \\ & = \varphi^s(v_r)\, v_1 \otimes \ldots \otimes v_{r-1} \otimes v_{r+1} \otimes \ldots \otimes v_p \otimes \varphi^1 \otimes \ldots \otimes \varphi^{s-1} \otimes \varphi^{s+1} \otimes \ldots \otimes \varphi^q. \end{aligned}$$

(b) Dla tensorów

$$(i) \qquad t = e_1 \otimes (5e_2 - 7e_3) \otimes (2e^2 + e^3) \otimes e^3 - e_2 \otimes e_3 \otimes (3e^2 - e^3) \otimes e^3,$$

$$(ii) \qquad t = (e_1 + 4e_3) \otimes (5e_1 - 2e_2 - 4e_3) \otimes (e^2 - 2e^3) \otimes (e^1 + e^2),$$

proszę obliczyć kontrakcje $C^2_1 t$ oraz $C^1_2 t$.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl