Algebra z geometrią, zestaw 2_12

2_12.1. Proszę wyznaczyć wartość $t(\varphi, v)$ tensora

$$t = e_2 \otimes e^1 + (e_1 + 3e_3) \otimes e^2 \in T^1_1(V),$$

dla $\varphi = e^1 + e^2 + e^3$, $v = e_1 + 5e_2 + 4e_3$.

2_12.2. Proszę wyznaczyć wartość tensora $A \otimes B - B \otimes A \in T^0_5(V)$ dla układu $(v_1, \ldots, v_5)$ gdy

(a) $A = e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + e^2 \otimes e^2$, $B = e^1 \otimes e^1 \otimes (e^1 - e^3)$, $v_1 = e_1, v_2 = e_1 + e_2, v_3 = e_2 + e_3, v_4 = v_5 = e_2$;

(b) $A = e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^1$, $B \in T^0_3(V)$ jest tensorem o wszystkich współrzędnych równych 1, $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_2 + e_3, v_3 = e_1 + e_3, v_4 = v_5 = e_2$.

2_12.3. Proszę wyznaczyć współrzędne tensorów:

(a) $(e_1 + e_2) \otimes (e_1 - e_2)$,

(b) $(e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2)$,

(c) $(e_1 + 2e_2) \otimes (e_1 + e_2) - (e_1 + e_2) \otimes (e_1 + 2e_2)$,

(d) $(e_1 + 2e_2) \otimes (e_3 + e_4) - (e_1 - 2e_2) \otimes (e_3 - e_4)$.

2_12.4. Dany jest rozkład tensora w bazie (e_i) oraz macierz przejścia do bazy (f_j). Proszę wyznaczyć rozkład tensora w „nowej” bazie dla

(a)
$$\begin{aligned} t &= e_2 \otimes (-e_1 + 3e_3) \otimes (e^1 - 3e^3) \\ &+ (e_1 - e_3) \otimes e_2 \otimes (e^2 + 3e^3), \end{aligned} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

(b)
$$\begin{aligned} t &= e_1 \otimes (e^2 + 3e^3) \otimes e^1 \\ &+ (e_1 - e_3) \otimes e^2 \otimes e^3, \end{aligned} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2_12.5. Zadajemy tensor poprzez współrzędne jego argumentów w ustalone bazie (e_i) przestrzeni V Proszę zapisać jego rozkład w bazie iloczynowej otrzymanej z tej bazy dla:

(a) $$t(\varphi, \psi, v) = (\varphi_1 - 3\varphi_3)\psi_2(2v^1 - v^2) + \varphi_2(-3\psi_1 + \psi_3)v^3,$$

(b) $$t(\varphi, u, v) = \varphi_2(-u^2 + 5u^3)v^1 + (-\varphi_1 + \varphi_3)u^1 v^3.$$

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl