Algebra z geometrią, zestaw 2_11

2_11.1. W dwuwymiarowej przestrzeni zespolonej V zadano formy kwadratowe

$$\begin{aligned} g &= \bar{x}x + 2\bar{y}y + i(\bar{x}y - \bar{y}x) \\ h &= \bar{x}x \end{aligned}$$

Proszę

(a) wypisać macierze obu tych form i przekonać się (stosując kryterium Sylwestera), że g jest dodatnio określona;

(b) wyznaczyć „wartości własne" λ i odpowiadające im „wektory własne" $v \in \mathbb{R}^3$ spełniające równanie
$$(H - \lambda G)\, v = 0;$$

(c) skonstruować ortonormalną (względem g) bazę V której elementami są obliczone w poprzednim punkcie „wektory własne" v;

(d) podać postać macierzy form g i h w nowej bazie.

2_11.2. W przestrzeni $V = \mathbb{R}^3$ wybrano bazę w postaci

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proszę pokazać, że odwzorowanie $V^* \ni \phi \to u_\phi \in V$ zadane równością

$$\forall\, v \in V: \ \phi(v) = \operatorname{Tr} u_\phi^{\mathrm{T}} v$$

zadaje izomorfizm przestrzeni V i V^* oraz znaleźć postać wektorów u_{e^i} dla e^i tworzących bazę V^* dualną do bazy e_i.

2_11.3. Niech ℓ_∞ oznacza przestrzeń ciągów o wartościach rzeczywistych, w których co najwyżej skończona ilość elementów jest niezerowa. Jako bazę ℓ_∞ wybieramy ciągi e_i, $i = 1, 2, \ldots$ o postaci $(e_i)_n = \delta_{i,n}$, to jest

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots), \ \ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \ \ \ldots \ \ e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1 \text{ razy}}, 1, 0, 0 \ldots), \ \ \ldots.$$

Proszę pokazać, że elementy zbioru dualnego e^j przestrzeni V^* są liniowo niezależne, ale nie tworzą bazy (to znaczy istnieją takie elementy V^*, które nie dadzą się zapisać w postaci *skończonej* kombinacji liniowej wektorów e^i).

Zadanie to ilustruje stwierdzenie (można je uczynić precyzyjnym!), że dla nieskończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V przestrzeń dualna jest od V „większa".

2_11.4. Niech $\hat{A} \in \operatorname{Hom}(V, W)$ i niech A będzie macierzą $\hat{A}$ w bazach $\{e_i\}$ i $\{f_j\}$ przestrzeni V i W. Proszę udowodnić, że macierz operatora $\hat{A}^t \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ w bazach dualnych $\{f^k\}$ i $\{e^l\}$ równa jest A^{T}.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl