Algebra z geometrią, zestaw 2_10

2_10.1. Dana jest macierz operatora ortogonalnego w ortonormalnej bazie przestrzeni euklidesowej. Proszę znaleźć macierz przejścia do bazy ortonormalnej w której macierz operatora przyjmuje postać kanoniczną oraz podać postać macierzy operatora w tej bazie. Proszę przedyskutować przypadki

$$a)\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2_10.2. Niech $\hat{A} \in \mathrm{End}(V), m \in \mathbb{N}$ i niech $v \in V$ będzie taki, że

$$\hat{A}^m v \neq 0, \qquad \hat{A}^{m+1} v = 0.$$

Proszę udowodnić, że $\{v, \hat{A}v, \ldots, \hat{A}^m v\}$ jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych.

2_10.3. Niech $\hat{A}, \hat{B} \in \mathrm{End}(V)$. Proszę udowodnić, że jeśli $\hat{A}\hat{B}$ jest operatorem nilpotentnym, to $\hat{B}\hat{A}$ jest operatorem niloptentnym.

2_10.4. Niech V będzie przestrzenią unitarną lub euklidesową. Proszę udowodnić, że jeśli $\hat{N} \in \mathrm{End}(V)$ jest nilpotentny i samosprzężony, to $\hat{N} = 0$.

2_10.5. W trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej V zadano formy kwadratowe

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2\left(x^1\right)^2 + 3\left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 + 2x^1x^2 - 2x^2x^3$$

oraz

$$\tilde{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1\left(x^1\right)^2 + 15\left(x^2\right)^2 - 4\left(x^3\right)^2 + 10x^1x^2 - 18x^1x^3 - 10x^2x^3.$$

Proszę

(a) wypisać macierze obu tych form i przekonać się (stosując kryterium Sylwestera), że g jest dodatnio określona;

(b) wyznaczyć „wartości własne” λ i odpowiadające im „wektory własne” $v \in \mathbb{R}^3$ spełniające równanie

$$\left(\tilde{G} - \lambda G\right) v = 0;$$

(c) skonstruować ortonormalną bazę V której elementami są obliczone w poprzednim punkcie „wektory własne” v (jak przedyskutowano na wykładzie, normalizację oraz — tam gdzie to potrzebne — ortonormalizację metodą Grama-Schmidta należy przeprowadzić używając metryki g);

(d) podać postać macierzy form g i $\tilde{g}$ w nowej bazie.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl