Algebra z geometrią, zestaw 2_09

2_09.1. W pewnej ortonormalnej bazie (e_1, e_2, e_3, e_4) przestrzeni euklidesowej V macierze operatorów $\hat{A}, \hat{B} \in \mathrm{End}(V)$ mają postać:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Czy istnieje taka baza p.w. V, w której macierze obu tych operatorów są diagonalne? Jeśli tak, to proszę wyznaczyć tę bazę oraz podać postać macierzy obu operatorów w tej bazie.

2_09.2. Proszę podać postać (w bazie (e_1, e_2, e_3, e_4)) macierzy operatora rzutowania na podprzestrzeń przestrzeni V z poprzedniego zadania, rozpinaną przez wektory własne operatora $\hat{A}$ do wartości własnej $\lambda = 2$.

2_09.3. Proszę obliczyć wartości i wektory własne macierzy

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{C}$. Dla jakich wartości a, b macierz $\boldsymbol{A}$ jest macierzą normalną, tzn. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}$? Proszę sprawdzić, że wektory własne są wtedy wzajemnie ortogonalne (względem iloczynu $(v, w) = \mathrm{Tr}\, v^\dagger w$.)

2_09.4. Niech V będzie trójwymiarową przestrzenią unitarną. Macierz operator $\hat{U} \in \mathrm{End}(V)$ ma w pewnej bazie ortonormalnej postać

$$U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+i & 1-5i & 2+2i \\ 1-5i & 1+i & 2+2i \\ 2+2i & 2+2i & 4-2i \end{pmatrix}.$$

Proszę sprawdzić, że $\hat{U}$ jest operatorem unitarnym, wyznaczyć jego wartości własne oraz bazę p.w. V, w której jego macierz jest diagonalna.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl