Algebra z geometrią, zestaw 2_08

2_08.1. Niech (V, g) będzie zespoloną przestrzenią wektorową z półtoraliniowym iloczynem skalarnym, $u, v \in V$ dowolnymi wektorami i niech $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$. Proszę wykazać równość

$$\begin{aligned} g\Big(u, \hat{A}v\Big) &= \frac{g\Big(u+v, \hat{A}(u+v)\Big) - g\Big(u-v, \hat{A}(u-v)\Big)}{4} \\ &+ \frac{g\Big(u+iv, \hat{A}(u+iv)\Big) - g\Big(u-iv, \hat{A}(u-iv)\Big)}{4i}. \end{aligned}$$

2_08.2. Niech V będzie przestrzenią unitarną i niech $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$. Proszę wykazać – korzystając z wyniku poprzedniego zadania – że jeśli dla każdego $v \in V$ mamy $\Big(v, \hat{A}v\Big) = 0$, to $\hat{A} = 0$.

2_08.3. Niech V będzie przestrzenią unitarną. Proszę wykazać, że $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ jest operatorem samosprzężonym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall\, v \in V \;:\; \Big(v, \hat{A}v\Big) \in \mathbb{R}.$$

2_08.4. Dana jest macierz operatora samosprzężonego w ortonormalnej bazie przestrzeni euklidesowej. Proszę znaleźć macierz przejścia do ortonormalnej bazy złożonej z wektorów własnych tego operatora oraz podać postać macierzy operatora w tej bazie.

$$a)\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & -15 \\ 3 & -9 & -5 \\ -15 & -5 & 15 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

2_08.5. Dana jest macierz operatora samosprzężonego w ortonormalnej bazie przestrzeni unitarnej. Proszę znaleźć macierz przejścia do ortonormalnej bazy złożonej z wektorów własnych tego operatora oraz podać postać macierzy operatora w tej bazie.

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -2i & 1+i \\ 2i & 5 & -2+2i \\ 1-i & -2-2i & 3 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & -i & 2+i \\ i & 1 & -1+2i \\ 2-i & -1-2i & 5 \end{pmatrix}.$$

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl