Algebra z geometrią, zestaw 2_07

2_07.1. Na przestrzeni $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym

$$g(p,q)=\int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

definiujemy operator $\hat{A}$ wzorem $\hat{A}(a_0+a_1x+a_2x^2)=a_1x$.

(a) Proszę pokazać, że $\hat{A}$ nie jest operatorem samosprzężonym.

(b) Proszę pokazać, że macierz operatora $\hat{A}$ w bazie $(1,x,x^2)$ ma postać

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

(c) Macierz A spełnia równość $A=A^{\mathrm{T}}$. Proszę wyjaśnić, dlaczego nie jest to sprzeczne z faktem, że $\hat{A}$ nie jest samosprzężony.

2_07.2. Niech (V,g) oraz (W,h) będą hermitowskimi, ortogonalnymi lub symplektycznymi p.w. z niezdegenerowanymi iloczynami skalarnymi i niech $\hat{A}\in\mathrm{Hom}(V,W)$. Operator $\hat{A}^*\in\mathrm{Hom}(W,V)$ definiujemy żądając, aby dla wszystkich $v\in V$ i dla wszystkich $w\in W$:

$$g\left(\hat{A}^*w,v\right)=h\left(w,\hat{A}v\right).$$

Proszę udowodnić następujące własności operacji sprzężenia odwzorowania liniowego:

(a) $(\hat{A}+\hat{B})^*=\hat{A}^*+\hat{B}^*$ dla wszystkich $\hat{A},\hat{B}\in\mathrm{Hom}(V,W)$,

(b) $(\alpha\hat{A})^*=\bar{\alpha}\hat{A}^*$ dla wszystkich $\hat{A}\in\mathrm{Hom}(V,W),\ \alpha\in\mathbb{K}$,

(c) $(\hat{A}^*)^*=\hat{A}$ dla wszystkich $\hat{A}\in\mathrm{Hom}(V,W)$,

(d) $(\hat{A}\hat{B})^*=\hat{B}^*\hat{A}^*$ dla wszystkich $\hat{A}\in\mathrm{Hom}(V,W)$, $\hat{B}\in\mathrm{Hom}(W,U)$.

2_07.3. Ustalmy wektor $u\in V$ i zdefiniujmy odwzorowanie liniowe $\hat{A}\in\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})$ równością

$$\hat{A}v=g(u,v).$$

Proszę dla $z\in\mathbb{C}$ (i standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{C}$: $h(z_1,z_2)=\overline{z_1}z_2$) obliczyć $\hat{A}^*(z)$.

2_07.4. Niech V będzie przestrzenią unitarną lub euklidesową i niech $u,v\in V$. Proszę udowodnić, że $(u,v)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $a\in\mathbb{K}$:

$$\|u\|\leqslant\|u+av\|.$$

2_07.5. Dla wszystkich liczb rzeczywistych $a_1,\ldots,a_m$ oraz $b_1,\ldots,b_m$ proszę udowodnić nierówność

$$\Big(\sum_{j=1}^m a_jb_j\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{j=1}^m ja_j^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^m\frac{b_j^2}{j}\Big).$$

2_07.6. Niech $u, v \in V$. Proszę udowodnić nierówność

$$\Big| \|u\| - \|v\| \Big| \leqslant \|u - v\|$$

2_07.7. Niech dla wektorów u, v zachodzą równości

$$\|u\| = 3, \qquad \|u + v\| = 4, \qquad \|u - v\| = 6.$$

Jaka jest wartość $\|v\|$?

2_07.8. Czy na przestrzeni $\mathbb{R}^2$ można zdefiniować dodatnio określony iloczyn skalarny taki, aby równość

$$\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$$

zachodziła dla wszystkich wektorów $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$?

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl