

## Algebra z geometrią, zestaw 2\_06

2\_06.1. W bazie  $(e_1, e_2, e_3)$  zespolonej przestrzeni wektorowej zadano formy kwadratowe związane z hermitowskimi metrykami:

$$(a) \quad g(x, x) = \overline{x^1}x^1 + 2\overline{x^2}x^2 + i\overline{x^1}x^2 - i\overline{x^2}x^1 + (1+i)\overline{x^2}x^3 + (1-i)\overline{x^3}x^2,$$

$$(b) \quad g(x, x) = (1-i)\overline{x^1}x^2 + (1+i)\overline{x^2}x^1 + i\overline{x^1}x^3 - i\overline{x^3}x^1 + \overline{x^2}x^3 + \overline{x^3}x^2.$$

Proszę dla obu z nich obliczyć macierz przejścia do bazy, w której metryka przyjmuje postać kanoniczną i podać sygnaturę metryki.

2\_06.2. W bazie  $(f_1, f_2, f_3)$  rzeczywistej (zespolonej) przestrzeni wektorowej dana jest macierz metryki symetrycznej (odpowiednio – hermitowskiej). Proszę przeprowadzić dla tej bazy ortogonalizację Grama-Schmidta, podać macierz przejścia do nowej bazy i macierz metryki w nowej bazie

$$a) \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad b) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ 1-i & 3 & 1-3i \\ 1 & 1+3i & 2 \end{pmatrix}$$

2\_06.3. W przestrzeni wielomianów rzeczywistych zmiennej  $x$  stopnia co najwyżej 3 wybrano bazę postaci  $f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2, f_4 = x^3$  i zadano symetryczny iloczyn skalarny

$$g(p, q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$$

Proszę – korzystając z procedury Grama-Schmidta – znaleźć w tej przestrzeni bazę ortogonalną.

2\_06.4. Stosując kryterium Sylwestera proszę rozstrzygnąć czy istnieją (a jeśli tak to jakie) wartości parametru  $\lambda$  dla której metryka symetryczna o formie kwadratowej

$$g(x, x) = 2(x^1)^2 + (x^2)^2 + 2\lambda x^1 x^2 - 2x^1 x^3 + 2x^2 x^3$$

jest dodatnio określona.

Leszek Hadasz  
hadasz@th.if.uj.edu.pl