

Algebra z geometrią, zestaw 2_05

2_05.1. Dana jest macierz G metryki symplektycznej g w bazie (e_1, \dots, e_4) . Proszę znaleźć macierz przejścia do bazy, w której macierz metryki ma postać kanoniczną dla

$$a) \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b) \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

2_05.2. W bazie (e_1, \dots, e_4) rzeczywistej przestrzeni wektorowej zadano formy kwadratowe związane z symetrycznymi metrykami:

$$(a) \quad g(x, x) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + 9(x^4)^2 + 2x^1x^2 + 6x^1x^4 + 2x^2x^3,$$

$$(b) \quad g(x, x) = 4(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^4)^2 - 4x^1x^2 + 4x^1x^4 - 3x^2x^4.$$

Proszę dla obu z nich obliczyć macierz przejścia do bazy, w której metryka przyjmuje postać kanoniczną i podać sygnaturę metryki.

2_05.3. W bazie (e_1, e_2, e_3) rzeczywistej przestrzeni wektorowej forma kwadratowa związana z symetryczną metryką ma postać

$$g(x, x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2.$$

Czy wynika stąd, że metryka ma sygnaturę $(3, 0, 0)$? Proszę sprowadzić tę metrykę do postaci kanonicznej i wyznaczyć w ten sposób jej sygnaturę. Gdzie leży przyczyna rozbieżności?

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl