Algebra z geometrią, zestaw 2_04

2_04.1. Proszę wykazać, że jeśli w przestrzeni z iloczynem skalarnym podprzestrzenie U i W spełniają $U \subset W$, to $W^{\perp} \subset U^{\perp}$.

2_04.2. Proszę udowodnić, że w przypadku niezdegenerowanej metryki na skończenie wymiarowej p.w. V dla każdej niezdegenerowanej podprzestrzeni $W \subset V$ zachodzi równość

$$(W^{\perp})^{\perp} = W.$$

2_04.3. Niech g będzie dowolnym półtoraliniowym iloczynem skalarnym na zespolonej przestrzeni wektorowej V i niech $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ będzie ciągiem wektorów w V. Proszę udowodnić, że jeśli macierz $g(f_i, f_j)$ jest nieosobliwa, to wektory f_i są liniowo niezależne.

2_04.4. Macierz metryki g przestrzeni wektorowej V ma w bazie $\{e_1, e_2, e_3\}$ postać:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b) \begin{pmatrix} -8 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proszę w obu tych przypadkach znaleźć bazę $\operatorname{Ker} g$, bazę podprzestrzeni W takiej, że $V = W \oplus \operatorname{Ker} g$ oraz wyznaczyć macierz metryki g w bazie zgodnej z tym rozkładem.

2_04.5. W bazie $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ przestrzeni wektorowej V dana jest macierz metryki g oraz współrzędne wektorów f_1, f_2 :

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = e_1, \; f_2 = e_2.$$

Proszę sprawdzić, czy przestrzeń $W = \operatorname{span}\{f_1, f_2\}$ jest niezdegenerowana. Jeśli tak, proszę znaleźć dowolną bazę $\{f_3, f_4\}$ przestrzeni $W^{\perp}$ oraz macierz metryki g w bazie $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl