Algebra z geometrią, zestaw 2_03

2_03.1. Niech $z_1, \ldots, z_{m+1}$ będą parami różnymi liczbami zespolonymi i niech $w_1, \ldots, w_{m+1} \in \mathbb{C}$. Proszę udowodnić, że istnieje dokładnie jeden wielomian p stopnia m taki, że $p(z_i) = w_i,\ i = 1, 2, \ldots m+1$.

2_03.2. Niech $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ i niech U_1 i U_2 będą podprzestrzeniami V. Proszę udowodnić, że jeśli U_1 i U_2 są podprzestrzeniami niezmienniczymi $\hat{A}$, to ich suma i część wspólna także są podprzestrzeniami niezmienniczymi $\hat{A}$.

2_03.3. Proszę udowodnić (lub podać kontrprzykład pokazujący fałszywość) zdanie:

Jeśli podprzestrzeń U przestrzeni V jest podprzestrzenią niezmienniczą dla każdego operatora $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$, to $U = \{0\}$ lub $U = V$.

2_03.4. Operator $\hat{A}$ definiujemy przez podanie jego macierzy w bazie (e_1, e_2, e_3). Proszę wyznaczyć jego wartości własne, bazy w jego podprzestrzeniach własnych, podać mierz przejścia z bazy pierwotnej do bazy w której macierz tego operatora jest diagonalna (lub częściowo diagonalna, gdy nie ma bazy zbudowanej z jego wektorów własnych) i podać postać macierzy operatora w tej bazie w następujących sytuacjach:

$$a)\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad b)\ \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad c)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad d)\ \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl