Algebra z geometrią, zestaw 2_02

2_02.1. Niech $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ i niech $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ zadany będzie wzorem

$$\hat{A}p(x) = \left(x^2 + 2\right) p''(x) - 2xp'(x) + 2p(x).$$

Proszę wyznaczyć macierz operatora $\hat{A}$ w bazie $e_n = (x-1)^{n-1},\ n = 1, 2, 3, 4$, oraz podać postać przykładowych baz jego jądra i obrazu.

2_02.2. Operator $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ gdzie V jest trójwymiarową p.w. nad ciałem liczb zespolonych, ma w bazie $\{e_1, e_2, e_3\}$ macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -i \\ 2 & -1 & 1 \\ i & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proszę znaleźć macierz tego operatora w bazie $\{f_1, f_2, f_3\}$, gdzie

$$f_1 = e_2 + e_3, \qquad f_2 = e_1 + e_3, \qquad f_3 = e_1 + e_2.$$

2_02.3. Dana jest baza (e_1, e_2) p.w. V. Macierz $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ w bazie $f_1 = -3e_1 + 7e_2,\ f_2 = e_1 - 2e_2$ jest równa $A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, a macierz $\hat{B} \in \mathrm{End}(V)$ w bazie $g_1 = 6e_1 - 7e_2,\ g_2 = -5e_1 + 6e_2$ jest równa $B_g = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Proszę wyznaczyć macierz operatora $\hat{A}\hat{B}$ w bazie (e_1, e_2).

2_02.4. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ i niech $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Operator $\hat{T}_A \in \mathrm{End}(V)$ zadany jest wyrażeniem

$$V \ \ni \ X \ \ \to \ \ \hat{T}_A(X) \ = \ A^{\mathrm{T}} X A \ \in \ V.$$

Proszę wyznaczyć macierz operatora $\hat{T}_A$ w kanonicznej bazie V.

2_02.5. Niech $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ i niech $\hat{A} \in \mathrm{End}(V)$ zadany będzie wzorem

$$\hat{A}p(x) = \frac{d}{dx}\left((x+1)p(x)\right) + \frac{1}{x}\int_0^x \left(p(t) + 2p''(t)\right)\, dt.$$

Proszę obliczyć $\det \hat{A}$.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl