Algebra z geometrią, zestaw 2_01 (powtórkowy)

2_01.1. Niech $(G, \cdot)$ będzie półgrupą. Proszę wykazać, że dla każdego $g \in G$ istnieje co najwyżej jeden element odwrotny.

2_01.2. Niech $(G, \cdot)$ i $(H, \circ)$ będą grupami a $f : G \to H$ homomorfizmem. Proszę wykazać, że $\operatorname{Ker} f$ jest podgrupą niezmienniczą G.

2_01.3. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Proszę przedstawić w postaci wykładniczej liczbę $(1 + \cos\alpha - i \sin\alpha)^n$.

2_01.4. Proszę rozwiązać (w ciele liczb zespolonych) równanie $z^2 + (1 - 4i)z - 5 - 5i = 0$, wyznaczając w sposób jawny części rzeczywiste i urojone jego pierwiastków.

2_01.5. Proszę rozwiązać równanie macierzowe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2_01.6. Dany jest układ równań liniowych, którego macierz dołączona ma postać:

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & 3 & 2\lambda \\ 1 & 5 & 4 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Proszę wyznaczyć wartości parametry λ, dla których układ ten ma rozwiązania oraz (gdy istnieją) znaleźć ich postać.

2_01.7. Proszę udowodnić, że jeśli wektory $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ rozpinają przestrzeń wektorową V, to także i wektory $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n\}$ rozpinają przestrzeń V.

2_01.8. Proszę udowodnić, że jeśli wektory $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ są liniowo niezależne, to także i wektory $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n\}$ są liniowo niezależne.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl