Algebra z geometrią, zestaw 12

12.1. Proszę wyznaczyć, w zależności od wartości parametrów λ, a, b i c, rzędy macierzy:

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}, \qquad b)\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

12.2. Proszę znaleźć rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = & 3 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 & = & 7. \end{cases}$$

12.3. Układ równań ma postać

$$\begin{cases} ax_1 + ax_2 & = & 1, \\ a^2x_1 + a^2x_2 & = & 1, \end{cases}$$

gdzie a jest stałą. Dla jakiej wartości a układ ten ma rozwiązanie? Jaka jest jego postać?

12.4. Dane są układy równań:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda+1 & \lambda & 2\lambda+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dla jakich wartości parametru λ układy te posiadają (jednoznaczne lub nie) rozwiązania? Jaka jest w każdym z dopuszczalnych przypadków postać tych rozwiązań?

12.5. Niech funkcja $\hat{A}:\ \mathbb{K}^m \ni v \ \to\ \hat{A}(v) \in \mathbb{K}^n,\ n \geq m$, zdefiniowana będzie równaniem

$$\left(\hat{A}(v)\right)^i = \begin{cases} v^i & \text{dla} \quad i \leq m, \\ 0 & \text{dla} \quad i > m. \end{cases}$$

Proszę udowodnić, że $\hat{A}$ jest odwzorowaniem liniowym.

12.6. Niech $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią wektorową wielomianów o współczynnikach rzeczywistych. Proszę udowodnić, że funkcja

$$V \ni v(x) \ \to\ \frac{1}{x} \int\limits_0^x v(t)\, dt \ \in V$$

jest odwzorowaniem liniowym.

12.7. Niech $\{e_1, \ldots, e_m\}$ będzie bazą p.w. V. Proszę udowodnić, że odwzorowanie liniowe $\hat{A}:\ V \to W$ jest jednoznacznie wyznaczone przez zadanie jego wartości $\hat{A}(e_i)$ dla wszystkich wektorów bazowych.

12.8. Niech $\hat{A}\ :\ \ V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym. Proszę udowodnić, że $\operatorname{Ker} \hat{A}$ jest podprzestrzenią V, a $\operatorname{Im} \hat{A}$ (obraz odwzorowania $\hat{A}$) jest podprzestrzenią przestrzeni W.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl