Algebra z geometrią, zestaw 10

10.1. Niech U_1, U_2 będą podprzestrzeniami p.w. V. Proszę pokazać, że $U_1 \cap U_2$ także jest podprzestrzenią V.

10.2. Proszę zbadać prawdziwość twierdzenia:

Niech U_1, U_2 i W będą podprzestrzeniami p.w. V i niech

$$U_1 \oplus W = U_2 \oplus W.$$

Wówczas $U_1 = U_2$.

10.3. Proszę udowodnić, że jeśli wektory $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ rozpinają przestrzeń wektorową V, to także i wektory $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \dots, v_{n-1} - v_n, v_n\}$ rozpinają przestrzeń V.

10.4. Proszę udowodnić, że jeśli wektory $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ są liniowo niezależne, to także i wektory $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \dots, v_{n-1} - v_n, v_n\}$ są liniowo niezależne.

10.5. Niech $v_1, v_2, \dots, v_n, W \in V$ i niech $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ będzie zbiorem wektorów liniowo niezależnych. Proszę udowodnić, że jeśli $\{v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_n + w\}$ jest zbiorem wektorów liniowo **zależnych**, to $w \in \mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

10.6. Proszę udowodnić, że przestrzeń wektorowa V jest nieskończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy w V istnieje nieskończony ciąg wektorów $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ takich, że zbiór wektorów $\{v_1, \dots, v_n\}$ jest liniowo niezależny dla każdego n.

10.7. Proszę udowodnić, że przestrzeń wektorowa $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ wielomianów o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$ jest nieskończenie wymiarowa.

10.8. Niech wektory $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tworzą bazę p.w. V. Proszę pokazać, że każdy wektor $u \in V$ może być w jednoznaczny sposób przedstawiony jako kombinacja liniowa wektorów v_i.

10.9. Niech podprzestrzeń $\mathbb{R}^5$ będzie zdefiniowana warunkami

$$U = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2, x_3 = 7x_4\right\}.$$

Proszę podać przykład bazy p.w. U.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl