Algebra z geometrią, zestaw 9

9.1. Proszę rozwiązać równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9.2. Stosując wzory Cramera proszą rozwiązać układy równań:

$$a) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z &= 14, \\ 4x + 3y - z &= 7, \\ x - y + z &= 2, \end{cases} \qquad b) \quad \begin{cases} x + y + z + v &= 10, \\ x - y - z + v &= 0, \\ x + 2y - v &= 1, \\ 2y + z + v &= 13. \end{cases}$$

9.3. Proszę udowodnić, że jeśli dla $\alpha \in \mathbb{K}$ oraz $v \in V$ zachodzi równość $\alpha \cdot v = 0$, to $\alpha = 0$ lub $v = 0$.

9.4. Dla każdego ze zbiorów poniżej proszę sprawdzić, czy jest on podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{K}^3 \equiv \mathbb{K}^{1\times 3}$

(a) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\right\}$;

(b) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\right\}$;

(c) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : \ x_1 x_2 x_3 = 0\right\}$;

(d) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 : \ x_1 = 5x_3\right\}$.

9.5. Proszę podać przykład takiego podzbioru U przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$, dla którego zachodzą warunki

$$\forall\, u, v \in U : \ u + v \in U,$$

oraz

$$\forall\, u \in U : \ -u \in U,$$

ale który **nie jest** podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^2$.

9.6. Proszę podać przykład takiego podzbioru U przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$, dla którego zachodzi

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ \forall\, u \in U : \ \alpha \cdot u \in U$$

ale który **nie jest** podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^2$.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl